Asymptotic expansions of finite Hankel transforms and the surjectivity of convolution operators

ひでし　かんせい
岡田靖則 (千葉大), 山根英司 (関西学院大)

超幾何方程式研究会 2024
1 月 5 日（金曜日）

1. $\mathcal{C}^\infty$ 級関数の空間における全射

- 任意の定数係数線形偏微分作用素 $P(D) \neq 0$ について
$$P(D)\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$
は全射 (Ehrenpreis-Malgrange).
- 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ について
$$\text{平行移動}\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n);\ u(x) \to u(x-a)$$
は全射.

前者は $P(D)\delta(x)$ との，後者は $\delta(x-a)$ との畳み込み.
一般論の中に位置づけられる.

2. 畳み込み作用素の invertibility

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ コンパクト台 (シュヴァルツ) 超関数

フーリエ変換 $\hat{u}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$ は整関数 $\hat{u}(\zeta), \zeta \in \mathbb{C}^n$ に拡張される.

$u* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ を定める.
これが全射のとき u は **invertible** だという．(単射性を要求しない．)

ものすごく大ざっぱに述べると……
$u * f = g$ は $\hat{u}\hat{f} = \hat{g}$ なので，$\hat{u}$ で割り算ができるかという問題.
$\hat{u}$ が小さすぎてはいけない．(少しくらい零点があってもよい．)
遠方で負べき程度の減衰ならば invertible．cos が掛かっても良い.

3. slowly decreasing function

定理 (Ehrenpreis, Hörmander)

$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が **invertible** ($u*\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ が全射) であることは下の各条件と同値.

(ア) [複素領域での評価] $\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\zeta)|\,;\zeta \in \mathbb{C}^n, |\zeta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(イ) [実領域での評価] $\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\eta \in \mathbb{R}^n, |\eta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(ウ) $u*\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ は全射.

4. slowly decreasing function

(イ) は　$\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\eta\in\mathbb{R}^n, |\eta-\xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

各 ξ のまあまあ近くで sup が大きい (小さすぎない) という条件.
ところどころ山があれば十分．谷，あるいは零点があってもよい.
$\hat{u}(\eta) = |\eta|^{-A}\cos|\eta|$ でもよい.

(イ) が満たされるとき，整関数 $\hat{u}(\zeta)$ は **slowly decreasing** だという.

u が invertible であることと同値.

5. 試験関数は invertible でない

$\hat{u}$ が slowly decreasing である条件は
$\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\eta \in \mathbb{R}^n, |\eta - \xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

$u*\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ が全射であることと同値.

$u*\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ が全射 (u が invertible) であることとも同値.

$v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ は invertible でない

- [証明 1] $\hat{v}$ は rapidly decreasing (Schwartz function).
- [証明 2] $v*\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_x^n) \subsetneq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

6. invertibility は mod $C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ で決まる

$\hat{u}$ が slowly decreasing であるとは
$\exists A > 0$ s. t.

$$\sup\{|\hat{u}(\eta)|\,;\,\eta\in\mathbb{R}^n, |\eta-\xi| < A\log(2+|\xi|)\} > (A+|\xi|)^{-A}$$

for $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$.

---

u が invertible であることと同値.

$v\in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ とすると, $\hat{v}$ は rapidly decreasing で

$\hat{u}$が slowly decreasing$\Leftrightarrow$ $\hat{u}+\hat{v}$が slowly decreasing.

$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}_x^n)$ が invertible$\Leftrightarrow$ $u+v\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}_x^n)$ が invertible.

$u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}_x^n)$ の invertibility を示したいとき，cutoff argument が使える．$\operatorname{singsupp} u = S_1\cup S_2$ のとき，

$$u = u_1+u_2+v, \quad \operatorname{singsupp} u_j = S_j, \quad v\in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$$

と分解．$\hat{u}_j$ の漸近挙動を別々に調べてから和を調べる．(後でこれより少し複雑な議論をする．)

7. 既知の invertible distributions

- $\sum_{j=1}^{J} P_j(D)\delta(x-a_j) \neq 0$ は invertible (多分 Hörmander, 冒頭の 2 つの例を含む).
- μ はアトムを持つコンパクト台の測度, $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の $\mathrm{singsupp}$ は $\mathrm{singsupp}\,\mu$ と disjoint で, $P(D) \neq 0$ は定数係数線形偏微分作用素とすると, $P(D)\mu + \nu$ は invertible (Abramczuk).
- $\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ で, $\mathrm{singsupp}\,\mu$ の近傍で f は real analytic とする. もし $f\mu$ が invertible ならば μ も invertible (Abramczuk).
- 球面 $|x| = r$ に台を持つデルタ関数は invertible (Lim). それの法線方向の (高階) 導関数も invertible (岡田・山根).
- u_1 と u_2 が invertible ならば $u_1 * u_2$ もそうである. invertibility は平行移動と相似拡大で保たれる.

もっとたくさんの例, 十分条件が欲しい.

8. フーリエ変換と有限ハンケル変換

球対称かつコンパクト台の普通の関数で，invertible なものを探す.

1 変数関数 $f_0(s)$ の台が $0 \le s \le 1$ に含まれるならば,
$f(x) = f_0(|x|), x \in \mathbb{R}^n$ について

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\text{const.}}{r^{n/2-1}} \int_0^1 \underbrace{s^{n/2}}_{\text{注目！}} f_0(s) J_{n/2-1}(rs)\,ds,$$

$$r = |\xi|,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

整関数として拡張できる.

slowly decreasing であることを示すには,
$\int_0^1 s^{n/2} f_0(s) J_{n/2-1}(rs)\,ds$ を下から評価すればよい.

$|\xi| = r \to \infty$ で冪程度の減少であること，またはそれに $\cos$ が掛かった挙動であることを言えばよい.

9. 有限ハンケル変換の漸近挙動

$\int_0^1 (\text{some function}) J_{n/2-1}(rs)\,ds$ の形の積分の $r \to \infty$ での漸近挙動を調べる．
被積分関数は $0 < s < 1$ で滑らかとする．

$r \to \infty$ での漸近挙動は両端 $s \to +0$ と $s \to 1-0$ での特異性で決まる．

$\varphi(s)$ が $s \to +0$ で 冪の和で漸近展開できるとする．
$s = 0$ の近くでカットオフしてハンケル変換すると，
$r \to \infty$ で冪の和で漸近展開できる (Roderick Wong '76).

係数にガンマ関数の商が現れる．分母の極に当たると，商は消えてしまう．

10. $s \to +0$ からの寄与: Wong '76 から分かること

$\varphi(s)$ は $(0,1)$ で $\mathcal{C}^\infty$ 級，$\mathrm{Re}(\mu+\nu) > -1$,

$s \to +0$ のとき $\varphi^{(j)}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^j}{ds^j} s^{\mu+k} \quad (j=0,1,2,\ldots)$ とする．

$\chi_0(s)$ は $\mathcal{C}^\infty$ 級, $\chi_0(s)=1$ in $(0,\varepsilon]$, $\chi_0(s)=0$ in $[1-\varepsilon,1)$ とし，

$$\begin{aligned} K &:= K\left(\mu,\nu,\{c_k\}_k\right) \\ &= \left\{k \in \mathbb{N}_0\,;\, c_k \neq 0,\ \frac{1}{2}(\mu+k-\nu-1) \notin \mathbb{N}_0\right\}. \end{aligned}$$

このとき， $K \neq \emptyset$ ならば，$k_0 = \min K$ として

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \chi_0(s)\varphi(s)J_\nu(rs)\,ds \\ &\sim c_{k_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu+k_0+\nu+1)\right) 2^{\mu+k_0}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(-\mu-k_0+\nu+1)\right) r^{\mu+k_0+1}} \quad (r \to \infty). \end{aligned}$$

$K=\emptyset$ ならば $\int_0^1 \chi_0(s)\varphi(s)J_\nu(rs)\,ds = o(r^{-\infty})$.

Γ の極が気になる．係数が消えるかも．$k \in K$ では消えない．

11. $s \to 1-0$ からの寄与：Sonine の利用

$\hat{f}(\xi) = \dfrac{\text{const.}}{r^{n/2-1}} \displaystyle\int_0^1 s^{n/2} f_0(s) J_{n/2-1}(rs)\, ds$ だった.

$f_0(s)$ を $1-s$ のべきで展開してもうまく行かない.

$\displaystyle\int_0^1 s^{\nu+1}(1-s)^{\alpha} J_{\nu}(rs)\, ds$ についてうまい公式がない.

Sonine (Sonin, Со́нин) ※ による式

$$\int_0^1 s^{\nu+1}\left(1-s^2\right)^{\alpha} J_{\nu}(rs)\, ds = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1) r^{-(\alpha+1)} J_{\nu+\alpha+1}(r)$$

を用いる． $1-s^2$ の冪で展開する.

$\nu = n/2-1$ とおくと球対称な関数のフーリエ変換に合う.

以下　$t = s^2$　とおく． s も t も $(0,1)$ を動く.

Sonine の形を壊してはいけない．カットオフしてはいけない．

※ Lenin/ Ле́нин, Stalin/Сталин, Putin/Пу́тин, Potemkin/Потёмкин, Rasputin/ Распу́тин, Gagarin/ Гага́рин

12. $s \to 1-0$ からの寄与 2

$\operatorname{Re}\nu > -1$, $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \cdots < \operatorname{Re}\lambda_m < \operatorname{Re}\Lambda$, $N \leq \operatorname{Re}\Lambda$,
$\operatorname{Re}\lambda_0 \leq N-1$ とする. $\phi(t)$ は $(0,1)$ の関数で, (recall $t = s^2$)

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k (1-t)^{\lambda_k} + (1-t)^{\Lambda}\psi(t) \quad (1-2\varepsilon < t < 1),$$

とする. ここで $a_0 \neq 0$ で $\psi(t)$ は $(0,1)$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級関数で
$\psi^{(k)}(t)\,(0 \leq k \leq N)$ は $(1-2\varepsilon, 1)$ で可積分とする.
$\chi_1(t)$ は $(0, 1-2\varepsilon]$ で $\chi_1(t) = 0$, $[1-\varepsilon, 1)$ で $\chi_1(t) = 1$ とする.

$$\tilde{\phi}(t) := \sum_{k=0}^{m} a_k (1-t)^{\lambda_k} + \chi_1(t)(1-t)^{\Lambda}\psi(t) \quad (0 < t < 1).$$

とおくと (Sonine の都合で第 2 項だけ $s = 1$ の近くで cutoff),

$$\int_0^1 s^{\nu+1}\tilde{\phi}(s^2) J_\nu(rs)\,ds$$
$$\sim a_0 \frac{2^{\lambda_0+1/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma(\lambda_0+1) r^{-(\lambda_0+3/2)} \cos\left(r - \frac{\pi}{2}(\nu+\lambda_0+1) - \frac{\pi}{4}\right).$$

13. 証明

$\tilde{\phi}(t) := \sum_{k=0}^{m} a_k(1-t)^{\lambda_k} + \chi_1(t)(1-t)^{\Lambda}\psi(t)$ のとき

$\int_0^1 s^{\nu+1}\tilde{\phi}(s^2)J_\nu(rs)\,ds \sim r$ のべき $\times \cos$ であることを示す.

$\int_0^1 s^{\nu+1}(1-s^2)^{\lambda_k}(rs)\,ds$ は Sonine の式

$\int_0^1 s^{\nu+1}\,(1-s^2)^{\alpha} J_\nu(rs)\,ds = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)r^{-(\alpha+1)}J_{\nu+\alpha+1}(r)$ を使う.

右辺 $\sim$ const. r の冪 $\times \cos$ である.

$\int_0^1 \chi_1(s^2)(1-s^2)^{\Lambda}\psi(s^2)\cdot \underbrace{s^{\nu+1}J_\nu(rs)}_{\text{注目!}}\,ds$ は r の冪で抑えられること

を示したい.

$$s^{\nu+1}J_\nu(rs) = \frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left\{s^{\nu+1}J_{\nu+1}(rs)\right\} \quad \text{(下降演算子)}$$

を用いて部分積分するたびに $1/r$ が出てくる.

ベッセル関数の番号 ν が上がると s をたくさん掛けたくなる.

s^2 の関数は微分すると s 倍が出て都合が良い.

14. 主定理

$n \geq 2$ で $\varphi(s)$ は $(0,1)$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級関数とする．$\phi(t)$ を

$$\varphi(s) = s^{n/2}\phi(s^2) \quad (0 < s < 1)$$

で定める．$\varphi(s)$ は $(0,1)$ で $\mathcal{C}^\infty$ 級，$\mathrm{Re}\,(\mu + n/2) > 0$,
$s \to +0$ のとき $\varphi^{(j)}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \dfrac{d^j}{ds^j} s^{\mu+k} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$ とする．
$-1 < \mathrm{Re}\,\lambda_0 < \mathrm{Re}\,\lambda_1 < \cdots < \mathrm{Re}\,\lambda_m < \mathrm{Re}\,\Lambda$, $N \leq \mathrm{Re}\,\Lambda$,
$\mathrm{Re}\,\lambda_0 \leq N - 1$ とする．$\phi(t)$ は $(0,1)$ の関数で，

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k (1-t)^{\lambda_k} + (1-t)^{\Lambda}\psi(t) \quad (1 - 2\varepsilon < t < 1)$$

とする．ここで $a_0 \neq 0$ で $\psi(t)$ は $(0,1)$ の $\mathcal{C}^\infty$ 級関数で
$\psi^{(k)}(t)\,(0 \leq k \leq N)$ は $(1-2\varepsilon, 1)$ で可積分とする．
このとき，

$$f(x) = |x|^{-n/2}\varphi(|x|)\chi_{[0,1]}(|x|) = \phi\left(|x|^2\right)\chi_{[0,1]}(|x|) \ \ (x \in \mathbb{R}^n)$$

は invertible． ここで， $\chi_{[0,1]}(\cdot)$ は $[0,1]$ の定義関数.

15. 主定理の証明

$s=0$ と $s=1$ の特異性の寄与を計算する.

$s=0$ で $\varphi(s)$ に Wong. $s=1$ で $s^{n/2}\phi(s^2)$ に Sonine.

$s=1$ 付近で単純に cutoff すると Sonine に合わない. どうする?

$\nu=\nu(n)=n/2-1$ とし,

$$\tilde{\phi}(s^2):=\underbrace{\sum_{k=0}^{m}a_k(1-s^2)^{\lambda_k}}_{\text{Sonine}}+\underbrace{\chi_1(s^2)}_{\text{cutoff}}(1-s^2)^{\Lambda}\psi(s^2).$$

$s=1$ の近くで不完全カットオフ.

$\int_0^1 s^{n/2}\tilde{\phi}(s^2)J_{n/2-1}(rs)\,ds$ の漸近挙動は 定数 $\times r$ の冪 $\times\cos$.

$s=0$ 付近で $\varphi(s)\left(=s^{n/2}\phi(s^2)\right)$ と Sonine の項の差をカットオフ

$$\tilde{\varphi}(s):=\chi_0(s)\{\varphi(s)-\underbrace{s^{n/2}\sum_{k=0}^{m}a_k(1-s^2)^{\lambda_k}}_{\text{Sonine}}\}$$

$\varphi(s)-\left\{\tilde{\varphi}(s)+s^{n/2}\tilde{\phi}(s^2)\right\}$ は C^∞ かつ $s=0,1$ 付近で消えるので,

ハンケル変換は急速に減少. ネグってよい.

16. 主定理の証明の続き

$$\tilde{\varphi}(s) := \chi_0(s)\Big\{\varphi(s) - \underbrace{s^{n/2}\sum_{k=0}^{m} a_k(1-s^2)^{\lambda_k}}_{\text{帳尻を合わせる}}\Big\},$$

$$\tilde{\varphi}^{(j)}(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^j}{ds^j} s^{\mu+k} + \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \frac{d^j}{ds^j} s^{n/2+2\ell} \quad (s \to +0)$$

の形で書ける．
第 2 の $\sum$ は $s^{n/2}\sum_{k=0}^{m} a_k(1-s^2)^{\lambda_k}$ に対応し，Wong の展開に寄与しない (分母のガンマ関数の極にぶつかるため).
ハンケル変換 $\int_0^1 \tilde{\varphi}(s) J_{\nu(n)}(rs)\, ds$ の漸近挙動は r の冪程度.

$s=1$ からは r の冪 $\times\cos$，$s=0$ からは r の冪.
どちらか片方が dominant ならば slow decrease が言える．
オーダーが一致する場合は, $\cos$ が消えるような $r=|\xi|$ を取れば
やはり slow decrease が言える．