常微分方程式のべき級数解

山根英司 (関西学院大学)

日数教沖縄 2019 年 8 月 7 日

1. カリキュラム

- １年 微積 テイラーの定理，テイラー展開
- 2 年 難しめの微積 級数（べき級数含む）
- 2 年秋 関数論入門 （テイラー展開は少し）
- 2 年秋 常微分方程式の初歩 (変数分離形，定数係数 2 階線形 ODE)
- 3 年春 常微分方程式のべき級数解， 超幾何級数←これについて話す

収束の話はあっさりと． 形式解を求めさせるだけでも大変.
難所があちこちにある.

2. 微分方程式以前 (指数関数)

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ と $(e^x)' = e^x$ より $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ のはずだが，本当にそうなるか．項別微分

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \quad (n=0\text{ の項は消えるので }1\text{ からとする}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (n-1=k\text{ とおいた}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

慣れたら k を使わず，　新 $n=$ 古 $n-1$ つまり 古 $n=$ 新 $n+1$ とする．

本では普通はいちいち n と k を使い分けないが，
学生が自力でこの説明を考え出すことは期待できない．

3. 微分方程式以前 (三角関数)

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ と $(\sin x)' = \cos x$ でやってみる．易しい．

$$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

$(\cos x)' = -\sin x$ でやってみる．難しい．

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} \quad (n = 0 \text{ の項は消えるので } 1 \text{ からとする}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{古 } n = \text{新 } n+1) \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

4.ODE

$y' = y$ のべき級数解を求める．２通りの問題設定

- 一般解
- $y(0) = 1$

後者の解を $y(0)$ 倍すれば前者の解になる．混乱を避けるため，どちらか片方に重点をおくのがいいと思う．

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を $y' = y$ に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{左辺で } n = 0 \text{ の項は消えるので } 1 \text{ からとする})$$

このままでは係数比較できない．左辺において 古 $n =$ 新 $n + 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

$(n+1)a_{n+1} = a_n$ であり，$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ である．

一般項は $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$(易しくない).

5.ODE どう教えるか迷うところ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{(左辺で } n=0 \text{ の項は消えるので 1 からとする)}$$

(ア) x^n で揃えたければ左辺において 古 $n =$ 新 $n+1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (n+1) a_{n+1} = a_n$$

x^n で揃えるのは素直．しかし，一般項の $\dfrac{a_0}{n!}$ が分かりにくい．

(イ) x^{n-1} で揃えたければ右辺において 古 $n =$ 新 $n-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}, \quad n a_n = a_{n-1}$$

x^{n-1} で揃えるのは素直でない．$n \geq 1$ というのが考えにくい．一般項は分かりやすい．

どちらも一長一短あるので迷う．

6. 漸化式

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$ の一般項が $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ ということは決して易しくない．学生は見たことがない．
$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ ならばすこしましだが，それでも易しくない．
$a_n = na_{n-1}$ はもっとまし．一般項 $a_n = a_0 n!$
高校数学では等差数列，等比数列に重点が置かれている．
漸化式に 1 回か 2 回の授業をあてる．
目標は超幾何級数で出てくる漸化式と一般項

$$A_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{n(n+c)} A_n, \quad A_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n} A_0$$

ただし，ここで $(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\,(n \geq 1)$, $(x)_0 = 1$ (rising factorial)
多くの本では,「新しい n」の説明もなくいきなり漸化式を導いて，一般項はこうだ，という書き方．分かるわけがない．

7. 漸化式 2

見慣れない漸化式は $n = 1, 2, \ldots$ を代入して実験

$$a_n = na_{n-1}, a_0 = 1$$

とすると， $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3 \cdot 2, a_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2, \ldots.$
実験を習慣づければ，より複雑な漸化式で凡ミス（1 だけずれる）を避けられる．

おまけ
入試の採点講評で，漸化式の一般項を求めたら $n = 1, 2$ を代入して検算せよと書いている．

8. 漸化式 3

$(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\,(n \geq 1)$, $(x)_0 = 1$ (rising factorial) とくに $(1)_n = n!$

漸化式 $(x)_n = (x+n-1)(x)_{n-1}$ あるいは $(x)_{n+1} = (x+n)(x)_n$

易しいものから

$$A_n = nA_{n-1} \text{ あるいは } A_{n+1} = (n+1)A_n$$

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{n} \text{ あるいは } A_{n+1} = \frac{A_n}{n+1}$$

$$A_n = (n+a-1)A_{n-1} \text{ あるいは } A_{n+1} = (n+a)A_n$$

$$A_n = \frac{A_{n-1}}{n+c-1} \text{ あるいは } A_{n+1} = \frac{A_n}{n+c}$$

$$A_n = \frac{(n+a-1)A_{n-1}}{n+c-1} \text{ あるいは } A_{n+1} = \frac{(n+a)A_n}{n+c}$$

目標は超幾何級数の

$$A_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)}A_{n-1} \text{ あるいは } A_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}A_n$$

9. 超幾何方程式

$$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}\,y' - aby = 0\ (c \neq 0,-1,-2,\dots)$$

$$xy'' + cy' = x^2y'' + (a+b+1)xy' + aby$$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ の形の解を探す.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{n(n-1)+cn\}\,A_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\{n(n-1)+(a+b+1)n+ab\}\,A_n x^n$$

左辺で 古 $n =$ 新 $n+1$ として

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+c)A_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)(n+b)A_n x^n$$

ゆえに $A_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)}A_n$, 一般項 $A_n = \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}A_0$

解 $y = A_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}x^n = A_0F(a,b;c;x)$ (超幾何級数)

10. タイプの違う項を分ける

$$xy'' + cy' = x^2 y'' + (a+b+1)xy' + aby$$

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + c\frac{d}{dx}\right)y = \left(x^2\frac{d^2}{dx^2} + (a+b+1)x\frac{d}{dx} + ab\right)y$$

一般的な用語ではないが，$x^j \frac{d^k}{dx^k}$ はウェイト $k-j$ だということにする．

$$x^j \frac{d^k}{dx^k} x^n = \text{const.} x^{n-(k-j)}$$

上の式では 左辺がウェイト 1, 右辺がウェイト 0.
一般に，確定特異点ではウェイトがいくらでも小さい項が現れうる． ウェイトが最大の項とその他の項に分ければ良い.
級数を代入して複雑な式になる前に右辺と左辺に分けることを勧める.
超幾何方程式は係数が高々2 次式なので易しい.

ご清聴ありがとうございました．