

# 可積分離散非線型シュレーディンガー 方程式の漸近解析

関西(かんせい)学院大学 山根英司(ひでし)

2016年10月25日 東大数理  
解析学火曜セミナー

# 1. 非線型 Schrödinger 方程式とソリトン

**focusing** NLS

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0$$

ソリトン

$$u(x, t) = 2\eta e^{2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t + i(\psi_0 + \pi/2)} \\ \times \operatorname{sech}(2\eta x - 8\xi\eta t - 2\delta_0)$$

搬送波 (exp, 振動)  $\times$  孤立進行波 (sech)

## 2. 時間無限大での漸近挙動

$t \rightarrow \infty$  で解は 1-ソリトンたちの和に漸近する .

NLS: Fokas-Its, Kamvissis

Toda lattice: Krüger-Teschl

KdV: 田中俊一 , Grunert-Teschl

### 3. 可積分離散 NLS (IDNLS) 1

$$\text{NLS (focusing)} \quad iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0$$

Ablowitz-Ladik ('75)

可積分離散非線型 Schrödinger 方程式 (focusing)

$$i \frac{d}{dt} R_n + (R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1}) + |R_n|^2 (R_{n+1} + R_{n-1}) = 0$$

ともに Lax 形式 (AKNS 形式) で書け, 逆散乱法で解ける.

ソリトン解がある.

搬送波 (exp, 振動) × 孤立進行波 (sech)

## 4. 可積分離散 NLS (IDNLS) 2

$z_1$  固有値,  $|z_1| > 1$ ,

$C_1(0)$  規格化定数 (norming constant)

(明るい) ソリトン

$BS(n, t; z_1, C_1(0))$

= (exp carrier wave)  $\times$  (sech traveling wave)

規格化定数  $C_1(0)$  を定数倍すると

$\Rightarrow$  PHASE SHIFT in exp and sech.

ソリトンの衝突の結果である.

## 5. ソリトンの具体的表示

$z_1 = \exp(\alpha_1 + i\beta_1)$ ,  $\alpha_1 > 0$ , eigenvalue

$$\text{BS}(n, t; z_1, C_1(0)) = \frac{C_1(0)}{|C_1(0)|} \exp(-i[2\beta_1(n+1) - 2w_1t]) \\ \times \sinh(2\alpha_1) \text{sech}[2\alpha_1(n+1) - 2v_1t - \theta_1].$$

$$v_1 = -\sinh(2\alpha_1) \sin(2\beta_1), \quad w_1 = \cosh(2\alpha_1) \cos(2\beta_1) - 1,$$

$$\theta_1 = \log |C_1(0)| - \log \sinh(2\alpha_1).$$

sech 孤立進行波の速度:  $\text{tw}(z_1) = \text{tw}(\exp(\alpha_1 + i\beta_1)) = \alpha_1^{-1}v_1$

---

規格化定数  $C_1(0)$  を定数倍すると

⇒ PHASE SHIFT in exp and sech.

ソリトンの衝突の結果である .

## 6. ソリトンの衝突と phase shift

可積分系でよくある話．**KdV** が最も有名．

速いソリトンが遅いソリトンを追い越す．

追い越しの前も後も同じ形，同じ速度で動く．

ただし，前後にずれることがある．

つまり，追い越している最中だけ加速または減速する．

## 6. ソリトンの衝突と phase shift

可積分系でよくある話．**KdV** が最も有名．

速いソリトンが遅いソリトンを追い越す．

追い越しの前も後も同じ形，同じ速度で動く．

ただし，前後にずれることがある．

つまり，追い越している最中だけ加速または減速する．

式の上では，規格化定数に他の定数がかかるという形で表現．

$t \rightarrow -\infty$  と  $t \rightarrow \infty$  でこの定数が違う（互いに逆）なので phase shift が起きる．

phase shift を調べる

＝規格化定数にかかる他の定数を調べる



## 7. IDNLS と Lax 対

$$i \frac{d}{dt} R_n + (R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1}) + |R_n|^2 (R_{n+1} + R_{n-1}) = 0 \quad (\text{IDNLS})$$

$i u_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0$  の離散版.

.....  
Ablowitz-Ladik 良い非線型項  $\Rightarrow$  Lax (AKNS) 表示

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} z & -\bar{R}_n \\ R_n & z^{-1} \end{bmatrix} X_n \quad (n\text{-part})$$

$$\frac{d}{dt} X_n = \left[ \text{a complicated matrix} \right] X_n \quad (t\text{-part})$$

(IDNLS) は両立条件  $\frac{d}{dt} \underbrace{X_{n+1}}_{n\text{-part}} = \left( \frac{d}{dt} \underbrace{X_m}_{t\text{-part}} \right)_{m=n+1}$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  を spectral parameter という。  
固有値 はその特別な値。

## 8. $n$ -part の固有関数

もし  $R_n \rightarrow 0$  (rapidly) as  $n \rightarrow \pm\infty$  ならば, 近似的に

$$X_{n+1} \approx \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} X_n.$$

## 8. $n$ -part の固有関数

もし  $R_n \rightarrow 0$  (rapidly) as  $n \rightarrow \pm\infty$  ならば, 近似的に

$$X_{n+1} \approx \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} X_n.$$

### 固有関数

$\phi_n(z, t), \psi_n(z, t)$   $|z| = 1$  の外部で正則,  $|z| > 1$  まで連続  
 $\psi_n^*(z, t)$   $|z| = 1$  の内部で正則,  $|z| < 1$  まで連続

$$\text{外 } \phi_n(z, t) \sim \begin{bmatrix} z^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{as } n \rightarrow -\infty, \quad (1)$$

$$\text{外 } \psi_n(z, t) \sim \begin{bmatrix} 0 \\ z^{-n} \end{bmatrix}, \quad \text{内 } \psi_n^*(z, t) \sim \begin{bmatrix} z^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

2次元の解空間に3つの解. 非自明な1次関係式がある.

## 9. 1次関係式

$|z| = 1$  上で,  $\exists! a(z), b(z) = b(z, t)$  such that

$$\phi_n = b\psi_n + a\psi_n^*,$$

$a(z) \in \mathcal{O}(|z| > 1) \cap \mathcal{C}^0(|z| \geq 1),$

$b(z) \in \mathcal{C}^\infty(|z| = 1).$

## 9. 1次関係式

$|z| = 1$  上で,  $\exists! a(z), b(z) = b(z, t)$  such that

$$\phi_n = b\psi_n + a\psi_n^*,$$

$a(z) \in \mathcal{O}(|z| > 1) \cap \mathcal{C}^0(|z| \geq 1)$ ,

$b(z) \in \mathcal{C}^\infty(|z| = 1)$ .

If  $a(z_j) = 0$ , then  $a(-z_j) = 0$ .

$\{\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}\}$  を固有値の4つ組という.

ソリトンに対応する. ソリトンの速度は固有値で決まる.  
 $a(z)$  と固有値は時間によらない.

## 10. 反射係数

$|z| = 1$  上で, 反射係数  $r(z)$  とは

$$r(z) := \frac{b(z)}{a(z)}$$

---

Recall:  $\psi_n \sim z^{-n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\psi_n^* \sim z^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  as  $n \rightarrow \infty$ .

$r$  の特徴付け (定義としても良い)

$$r\psi_n + \psi_n^* \sim \text{const.} \begin{bmatrix} z^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n \rightarrow -\infty).$$

時間発展

$$r(z, t) = r(z) \exp(it(z - z^{-1})^2), \text{ where } r(z) = r(z, 0).$$

## 11. 散乱データ

$a(z_j) = 0$  (order 1) とする.  $\pm z_j$  は固有値.

$\phi_n(z_j) = \exists! b_j \psi_n(z_j)$ .

規格化定数とは  $C_j := \frac{b_j}{\frac{d}{dz}a(z_j)}$

散乱データ

$$\{(\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}, C_j)\}_{j=1}^J, \quad r(z)$$

ポテンシャル  $R_n$  は  $r(z) = 0$  のとき 無反射 だという.

## 11. 散乱データ

$a(z_j) = 0$  (order 1) とする.  $\pm z_j$  は固有値.

$\phi_n(z_j) = \exists! b_j \psi_n(z_j)$ .

規格化定数とは  $C_j := \frac{b_j}{\frac{d}{dz}a(z_j)}$

散乱データ

$$\{(\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}, C_j)\}_{j=1}^J, \quad r(z)$$

ポテンシャル  $R_n$  は  $r(z) = 0$  のとき **無反射** だということ.

逆散乱変換

ポテンシャル  $R_n$  は散乱データから再構成できる.

極付き Riemann-Hilbert 問題 を解けば良い.

(Gelfand-Levitan-Marchenko 方程式でも出来る.)



## 12. Riemann-Hilbert 問題

$\Gamma$ : 曲線 (左側が正の側).

$m(z)$ : 未知行列, 成分は  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  の正則関数

$m_{\pm}$ :  $\Gamma$  の正負それぞれの側からの境界値

**RHP:  $m_+ = m_- v$  on  $\Gamma$**  ( $v$ : ジャンプ行列)

$v = I$  のとき  $m$  は正則につながる.

**極付き RHP**  $m(z)$  に極を許し, 留数に条件をつける.

## 12. Riemann-Hilbert 問題

$\Gamma$ : 曲線 (左側が正の側).

$m(z)$ : 未知行列, 成分は  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  の正則関数

$m_{\pm}$ :  $\Gamma$  の正負それぞれの側からの境界値

**RHP:  $m_+ = m_- v$  on  $\Gamma$**  ( $v$ : ジャンプ行列)

$v = I$  のとき  $m$  は正則につながる.

**極付き RHP**  $m(z)$  に極を許し, 留数に条件をつける.

**可積分系の逆散乱変換に使う場合**

$\Gamma$  は  $\mathbb{R}$ (連続可積分系) か  $|z| = 1$ (離散可積分系).

ジャンプ行列は反射係数で書ける.

$m(z)$  の極は固有値.

留数の条件は規格化定数で書ける.

## 13. 逆散乱法で初期値問題を解く

— 散乱データの時間発展 —

固有値は時間によらない .

$$C_j(t) = C_j(0) \exp(it(z_j - z_j^{-1})^2),$$

$$r(z, t) = r(z) \exp(it(z - z^{-1})^2) \text{ on } |z| = 1,$$

where  $r(z) := r(z, 0)$

— 初期値問題 —

初期値  $R_n(0)$  で  $t = 0$  における散乱データが決まる .

$t > 0$  のおける散乱データが決まる .

ポテンシャル再構成.  $R_n(t)$  ( $t > 0$ ) を得る .

## 14. IDNLS: 無反射の場合

もし  $r(z) = r(z, 0) = 0$  ならば  $r(z, t) = 0$  for all  $t$  であり

$R_n(t) =$  多重ソリトン.

$t \rightarrow \infty$  で 1-ソリトンたちの和で近似される.

**PHASE SHIFT** (formal proof in Ablowitz et al. '04)

各項は  $BS(n, t, z_j, p_j T(z_j)^{-2} C_j(0))$

**PHASE SHIFT** は固有値で決まる:

$$p_j := \prod_{k>j} z_k^2 \bar{z}_k^{-2}, \quad T(z_j) := \prod_{k>j} \frac{z_k^2 (z_j^2 - \bar{z}_k^{-2})}{z_j^2 - z_k^{-2}}$$

$j$  番目のソリトンは  $(j - 1)$  番目より速いとする.

## 15. 主結果: もし反射があったら

$R_n(0)$  が急減少で, いくつかの generic な仮定を満たすとき  
 $s$  番目のソリトンとともに運動する観測者から見て

$|n| < 2t$  **timelike** な領域: **Phase Shift** の新公式

$$R_n(t) = \text{BS} \left( n, t; z_s, \delta(0)\delta(z_s)^{-2} p_s T(z_s)^{-2} C_s(0) \right) + O(t^{-1/2}).$$

$\delta(z)$  は  $r(z)$  を含む積分.

$p_s$  と  $T(z_s)$  は  $z_k$ 's ( $k > s$ ) と  $z_s$  で書ける.

$z_k$  たちは  $z_s$  より速いソリトンに対応.

$|n| \sim 2t$  主要項は無反射のときと同じ

$$R_n(t) = \text{BS} \left( n, t; z_s, p_s T(z_s)^{-2} C_s(0) \right) + O(t^{-1/3}).$$

$|n| > 2t$  主要項は無反射のときと同じ

$$R_n(t) = \text{BS} \left( n, t; z_s, p_s T(z_s)^{-2} C_s(0) \right) + O(n^{-k}), \quad \forall k.$$

## 16. timelike region における関数 $\delta(z)$

$|n|/t < 2$  (the timelike region) において

$$A := \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 + n/t} - i\sqrt{2 - n/t} \right).$$

$$S_1 := e^{-\pi i/4} A, \quad S_2 := e^{-\pi i/4} \bar{A}, \quad S_3 := -S_1, \quad S_4 := -S_2.$$

すべて円  $|z| = 1$  の上にある.

相関数 (後述) の鞍点である.

$$\delta(z) := \exp \left( \frac{-1}{2\pi i} \left[ \int_{S_1}^{S_2} + \int_{S_3}^{S_4} \right] (\tau - z)^{-1} \log(1 + |r(\tau)|^2) d\tau \right)$$

積分路は弧  $\subset \{|z| = 1\}$ .

$\delta(z)$  は反射係数で決まる.

無反射のとき  $\delta(z) \equiv 1$

## 17. 極付き Riemann-Hilbert 問題

$$m_+(z) = m_-(z)v(z) \text{ on } |z| = 1$$

$$v(z) = \begin{bmatrix} 1 + |r(z)|^2 & e^{-2\varphi} \bar{r}(z) \\ e^{2\varphi} r(z) & 1 \end{bmatrix} \text{ ジャンプ行列}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z \quad \text{相関数!}$$

非線型フーリエ・ラプラス解析みたいな感じ。

$m(z)$  の極（固有値）における留数には規格化定数で書ける条件を課す。

ポテンシャル再構成公式  $R_n(t) = - \left. \frac{d}{dz} m(z)_{21} \right|_{z=0}$

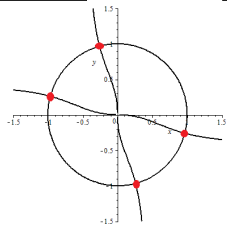
初期値問題が解ける． 漸近展開も分かる．

## 18. 領域によって挙動が違うのは何故か

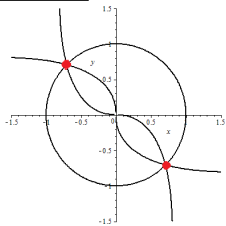
$$\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z \quad \text{相関数}$$

下図の曲線 (円を含む) は  $\text{Re}\varphi(z) = 0$ . 赤丸・黒丸は停留点.

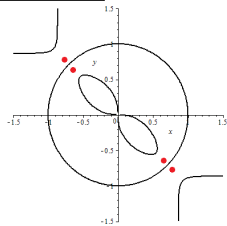
$$|n| < 2t$$



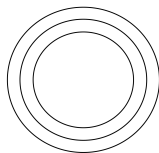
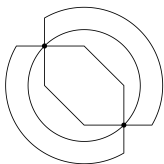
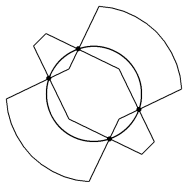
$$|n| = 2t$$



$$|n| > 2t$$



上図の  $\text{Re}\varphi(z) = 0$  と極を避けて steepest descent path





## 19.

以下ではもう少し詳しく述べる．

たくさんある極を4つまで減らす．  
つまり，ソリトン一つに話に帰着する．

観測者はソリトンを追いかける．  
「自分」より遅いものは単に無視．  
「自分」より速いものの影響を計算．

## 20. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$  は第  $j$  ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

## 20. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$  は第  $j$  ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第  $s$  ソリトンを追いかける観測者:  $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

## 20. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$  は第  $j$  ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第  $s$  ソリトンを追いかける観測者:  $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) < 0 \Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$  指数減少.

## 20. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$  は第  $j$  ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第  $s$  ソリトンを追いかける観測者:  $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) < 0 \Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$  指数減少.

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) > 0$

$\Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$  指数増大, 逆数で置き換えるトリックあり.

うまく未知関数を取り替えれば良い.

## 20. 観測者より速いソリトン

$\text{tw}(z_j)$  は第  $j$  ソリトンの速度, 遅いものから順に番号.

$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$|z_j^{-2n} C_j(t)| = |C_j(0)| \exp[2\alpha_j t \{\text{tw}(z_j) - n/t\}]$$

第  $s$  ソリトンを追いかける観測者:  $n/t \approx \text{tw}(z_s)$

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) < 0 \Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$  指数減少.

$\text{tw}(z_j) - \text{tw}(z_s) > 0$

$\Rightarrow z_j^{-2n} C_j(t)$  指数増大, 逆数で置き換えるトリックあり.

うまく未知関数を取り替えれば良い.

---

$\pm z_s, \pm \bar{z}_s^{-1}$  以外の極は除去できる.

未知関数の変換により  $C_s(t)$  に  $p_s T(z_s)^{-2}$  がかかる.

$$p_s := \prod_{j>s} z_j^2 \bar{z}_j^{-2}, \quad T(z_s) := \prod_{j>s} \frac{z_j^2 (z_s^2 - \bar{z}_j^{-2})}{z_s^2 - z_j^{-2}}$$

## 21. reduction の方針

下の論文の方法を使う .

P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer and X. Zhou, The Toda rarefaction problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **49**(1) (1996), 35-83.

KdV に適用した例

K. Grunert and G. Teschl, Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent, *Math. Phys. Anal. Geom.* **12**(3) (2009)

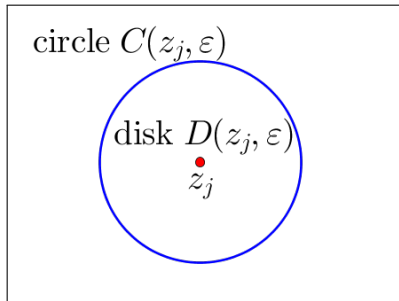
極の 4 つ組がたくさん,  $r(z) \neq 0$

- > じゃまな極を 'blowup' (4 つ組を一組だけ残す)
- > 極除去 (遅いソリトンに対応するもの),  $r(z) \neq 0$
- > 極除去 (速いソリトンに対応するもの),  
極の 4 つ組が一組だけ残る,  $r(z) \neq 0$
- > 極の 4 つ組が一組だけ, 無反射: 1-ソリトン (BS)

## 22. 'blowup'

$$\text{Res}(m(z); z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

極における特異性を円に沿う不連続性に置き換える.



円盤  $D(z_j, \varepsilon)$  において,  
 $m$  の特異部分を引き去る.  
新しい未知関数  $\hat{m}$ .

$z_j$  で正則.

$C(z_j, \varepsilon)$  で不連続



## 23. 'blowup' 2

$$\text{Res}(m(z); z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

$m(z)$  の第 1 列の留数 =  $z_j^{-2n} C_j(t) \times (m(z)$  の第 2 列)

$$m(z) \text{ の第 1 列} = \frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z - z_j} \times m(z) \text{ の第 2 列} \pmod{\mathcal{O}_{z_j}}$$

円盤  $D(z_j, \varepsilon)$  で  $\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z - z_j} & 1 \end{bmatrix}$  と置く .

$z_j$  で正則 ← 特異性を除去  
 $C(z_j, \varepsilon)$  に沿ってジャンプあり.

## 24. 非対角成分

定義 (blowup)

$$\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円盤)}$$

blowup 後の方程式

$$\hat{m}_+(z) = \hat{m}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ on } C(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円)}$$

## 24. 非対角成分

定義 (blowup)

$$\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円盤)}$$

blowup 後の方程式

$$\hat{m}_+(z) = \hat{m}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ on } C(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円)}$$

$t \rightarrow \infty$  のときジャンプ行列は?

- $z_j^{-2n} C_j(t)$  が指数減少ならば, 単位行列に収束する.  
自分 (観測者) より遅いソリトンは無視できる.
- $z_j^{-2n} C_j(t)$  が指数増大 (速いソリトン) ならば難しい.

## 24. 非対角成分

定義 (blowup)

$$\hat{m}(z) := m(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ in } D(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円盤)}$$

blowup 後の方程式

$$\hat{m}_+(z) = \hat{m}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_j^{-2n} C_j(t)}{z \mp z_j} & 1 \end{bmatrix} \text{ on } C(\pm z_j, \varepsilon) \text{ (円)}$$

$t \rightarrow \infty$  のときジャンプ行列は?

- $z_j^{-2n} C_j(t)$  が指数減少ならば, 単位行列に収束する.  
自分 (観測者) より遅いソリトンは無視できる.
- $z_j^{-2n} C_j(t)$  が指数増大 (速いソリトン) ならば難しい.

$\pm z_j$  に加えて  $\pm \bar{z}_j^{-1}$  についても同様.

## 25. 観測者より速いソリトンの取り扱い

一般的設定で記述: 径路は  $\Gamma$  とし,  $z_j^{-2n}C(t)$  を  $A$  と書く.  
 $A$  が大きいとき, 円に沿うジャンプが大きい.

$$M_+(z) = M_-(z)V(z) \quad \text{on } \Gamma,$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A}{z \mp z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm z_0, \varepsilon),$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}}{z \mp \bar{z}_0^{-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon),$$

$$M(z) \rightarrow I \quad \text{as } z \rightarrow \infty.$$

## 25. 観測者より速いソリトンの取り扱い

一般的設定で記述: 径路は  $\Gamma$  とし,  $z_j^{-2n}C(t)$  を  $A$  と書く.  
 $A$  が大きいとき, 円に沿うジャンプが大きい.

$$M_+(z) = M_-(z)V(z) \quad \text{on } \Gamma,$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A}{z \mp z_0} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm z_0, \varepsilon),$$

$$M_+(z) = M_-(z) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{z}_0^{-2}\bar{A}}{z \mp \bar{z}_0^{-1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon),$$

$$M(z) \rightarrow I \quad \text{as } z \rightarrow \infty.$$

$A$  (大) を  $1/A$  (小) で置き換えるには?

## 26. 観測者より速いソリトンの取り扱い 2

$$R(z, z_0) := \frac{z_0^2(z^2 - \bar{z}_0^{-2})}{z^2 - z_0^2}. \text{ phase shift formula に出てくる量.}$$

## 26. 観測者より速いソリトンの取り扱い 2

$$R(z, z_0) := \frac{z_0^2(z^2 - \bar{z}_0^{-2})}{z^2 - z_0^2}. \text{ phase shift formula に出てくる量.}$$

上の RHP は下のと同値 (by 未知関数の変換)

$$\tilde{M}_+(z) = \tilde{M}_-(z)D(z)^{-1}V(z)D(z) \quad \text{on } \Gamma,$$

$$D(z) := \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix}, \quad \text{on } \Gamma,$$

$$\tilde{M}_+(z) = \tilde{M}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & -R(z, z_0)^2 \frac{z \mp z_0}{A} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm z_0, \varepsilon),$$

$$\tilde{M}_+(z) = \tilde{M}_-(z) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ -R(z, z_0)^{-2} \frac{z \mp \bar{z}_0^{-1}}{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}} & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{on } C(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon),$$

$$\tilde{M}(z) \rightarrow I \quad \text{as } z \rightarrow \infty.$$

**A は分母に移った!**



## 27. 観測者より速いソリトンの取り扱い 3

前ページで使った変換は  $\tilde{M}(z) = \text{diag}(z_0^2, z_0^{-2})M(z)D(z)$

$$D(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z \mp z_0}{A} \\ \frac{A}{z \mp z_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix} & \text{in } D(\pm z_0, \varepsilon), \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}}{z \mp \bar{z}_0^{-1}} \\ -\frac{z \mp \bar{z}_0^{-1}}{\bar{z}_0^{-2} \bar{A}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix} & \text{in } D(\pm \bar{z}_0^{-1}, \varepsilon), \\ \begin{bmatrix} R(z, z_0)^{-1} & 0 \\ 0 & R(z, z_0) \end{bmatrix} & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$\pm z_0$  と  $\pm \bar{z}_0^{-1}$  は除去可能特異点である.

## 28. 観測者より速いソリトンの取り扱い 4

上の話に (blowup せずに残しておいた) 極が加わったら?  
観測者が追いかけているソリトンの分の極だけ残してある.  
観測者より速いものと遅いものは消す.

$$\text{Res}(M(z); \pm p) = \lim_{z \rightarrow \pm p} M(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p^{-2n} C & 0 \end{bmatrix}$$

とし,  $\pm \bar{p}^{-1}$  でも同様とする.

## 28. 観測者より速いソリトンの取り扱い 4

上の話に (blowup せずに残しておいた) 極が加わったら?  
観測者が追いかけているソリトンの分の極だけ残してある。  
観測者より速いものと遅いものは消す。

$$\text{Res}(M(z); \pm p) = \lim_{z \rightarrow \pm p} M(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p^{-2n} C & 0 \end{bmatrix}$$

とし,  $\pm \bar{p}^{-1}$  でも同様とする。

新しい未知関数  $\tilde{M}(z)$  が満たすべき条件は

$$\text{Res}(\tilde{M}(z); \pm p) = \lim_{z \rightarrow \pm p} \tilde{M}(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p^{-2n} \tau C & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau = R(\pm p, z_0)^{-2} = \left( \frac{p^2 - z_0^2}{z_0^2(p^2 - \bar{z}_0^{-2})} \right)^2,$$

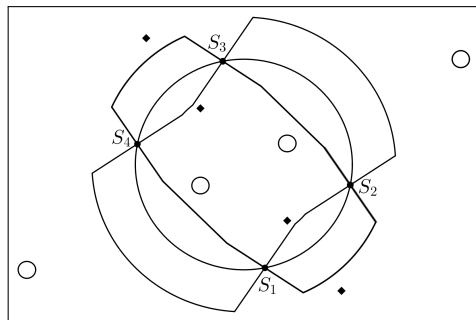
正規化係数  $C$  が  $\tau$  倍された。

これが phase shift formula の由来である。

## 29. 反射係数の影響

$j$ 's with  $n/t - \text{tw}(z_j) \neq 0$  について, blowup と逆数の方法を適用. ほとんどの極は小さい円に置き換わる. そこでのジャンプは無視できる.

もし  $n/t - \text{tw}(z_s) \approx 0$  ならば,  $\pm z_s, \pm \bar{z}_s^{-1}$  は残る.



○ もともとの径路  $|z|=1$  を変形する.

(nonlinear  
steepest descent)

$|n| < 2t$  ならば

4つの

鞍点が  $|z|=1$  上にある.

極 4 つで無反射の場合 (1-ソリトン) に帰着できる.

### 30. 領域によって挙動が違うのはなぜ?

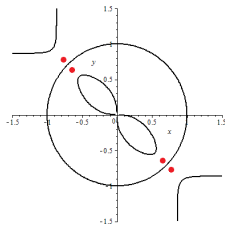
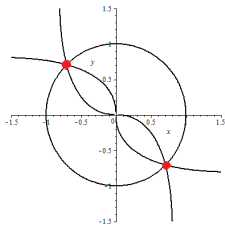
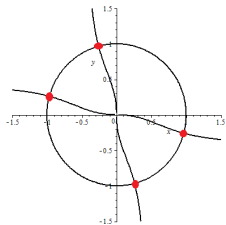
$$\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z \quad \text{相関数}$$

曲線  $\text{Re } \varphi(z) = 0$  は original RHP の径路  $|z| = 1$  を含む .  
赤丸は鞍点または高次の停留点 (真ん中の図)

$|n| < 2t$ (鞍点)

$|n| = 2t$

$|n| > 2t$ (鞍点)



左端の場合, 未知関数の変換のため  $\delta(z)$  を導入.

反射係数を含む積分 (鞍点から鞍点への円弧に沿う) で定義される .

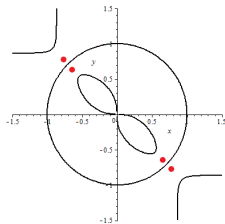
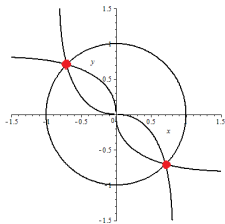
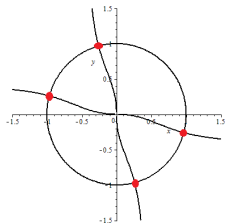
## 31. 曲線 $\operatorname{Re}\varphi(z) = 0$ と新しい径路

曲線  $\operatorname{Re}\varphi(z) = 0$  RHP の径路 (単位円) を含む .

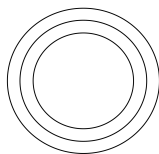
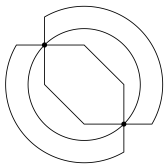
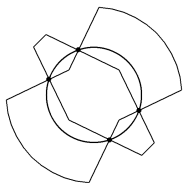
$|n| < 2t$  (鞍点)

$|n| = 2t$

$|n| > 2t$  (鞍点)



単位円を変形 .  $\operatorname{Re}\varphi(z) = 0$  と極 (4 個) を避ける (最急降下)



## References

- Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D., Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems, 2004.
- Deift P., Zhou X., A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, (1993)
- P. Deift, S. Kamvissis, T. Kriecherbauer and X. Zhou, The Toda rarefaction problem, (1996).
- K. Grunert and G. Teschl, Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent, (2009).
- Yamane H., Long-time asymptotics for the **defocusing** integrable discrete nonlinear Schrödinger equation, (2014), II (2015)

御清聴ありがとうございました.

Yamane H., Long-Time Asymptotics for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation: the focusing case,  
arXiv:1512.01760

このスライドは

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane>  
に置きます.