数学は何に似ているか？

川中宣明

１．数学は望遠鏡に似ている

２００８年の春分の日は３月２０日、秋分の日は９月２３日でした。また、２００９年の春分の日は３月２０日です。したがって、春分の日から秋分の日までの日数は１８７日、秋分の日から春分の日までの日数は１７８日となって、春分から秋分の方が９日間も長いということがわかります。一方、夏至から冬至までの日数と、冬至から夏至までの日数の間には殆ど差がありません。小学生でもできる計算ですが、得られた結果には「どうして？」と当惑させられてしまいます。

小学生用の図鑑などに、地球が太陽のまわりの円周を公転している図が載っています。地軸が公転円に垂直ではなく、やや傾いていて同じ傾きを保ったまま公転しているために、例えば日本など中緯度の国の場合、春夏秋冬の別が生じることも説明されています。しかし、もし、そうであるなら、秋分から春分までの日数と春分から秋分までの日数は等しいはずです。上で行った計算は、小学生用の図鑑の説明に微妙な修正が必要であることを暗示しています。春分、秋分、冬至、夏至は太陽の観測だけで決まりますから、大昔から人類は知っていました。上の計算にコペルニクスが気付いていたのかどうか、興味がありますが、私はどちらであるのか知りません。ケプラーが（チコ・ブラーヘによる火星の観測データを基にして）コペルニクスの「惑星の太陽を中心とする円軌道説」を修正し「太陽を焦点とする楕円軌道説」を提出したのですが、このケプラー説が出て初めて、上に述べた私たちの疑問は氷解するのです。つまり、太陽が楕円の焦点に位置し、楕円の長径の両端のうち太陽に近い方を冬至点、遠い方を夏至点として、太陽を通り長径に垂直な直線が楕円と交わる２点を秋分点と春分点とすれば、秋分から（冬至を経て）春分に至る軌道の長さが、春分から（夏至を経て）秋分に至る長さよりも短いことがわかります。

（註）ケプラーの発見については、朝永振一郎著「物理学とはなんだろうか　上」（岩波新書、黄版）の第１章に書かれています。もっと詳しく知るには、アーサー・ケストラー著「ヨハネス・ケプラー　近代宇宙観の夜明け」が必読です。こちらは永らく絶版でしたが、最近、「ちくま学芸文庫」の一冊として復刊されました。

いかがでしょうか？肉眼だと、つるつるにしか見えない月が簡単な望遠鏡で覗くことによって、多くの「あばた」のあるざらざらした物体であることがわかるのと似ているとは思われませんか？

このように、算数や数学には「肉眼」では、ぼんやりとしか見えないものを拡大して「心の目に」くっきりと映し出す望遠鏡のような力があるのです。もちろん、「見えた」ものが何を意味するかということについては自分で考えなくてはなりません。これは、望遠鏡で

観測した「あばた」が月の山ではないかと推理することが（望遠鏡の役目ではなく）人間の判断力にゆだねられているのと同じです。

ここまでは小学生の算数しか使いませんでした。ここからは、もっと高性能な「望遠鏡」、つまり高校程度の数学を使って、もっと詳しい観察をしてみましょう。太陽の周りの地球軌道である楕円を表す方程式を

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad （長径\ a > 短径\ b > 0）$$

とし、x 軸と楕円の交点をＡ(a,0), A'(−a,0) とします。また、焦点を F (x 座標が正), F' (x 座標が負）とし、太陽が点 F に位置しているとします。点 F を通り、x 軸に垂直な直線が楕円と交わる点をＰ(y 座標が正)、Q (y 座標が負)とし、点 F' を通り、x 軸に垂直な直線が楕円と交わる点を P' (y 座標が正)、Q' (y 座標が負)とします。点Ｐが春分のときの、点Ｑが秋分のときの地球の位置で地球は時計と反対の向きに公転すると考えます。秋分から春分までは弧 QAP で、春分から秋分までは弧 PA'Q で表されます。さて

$$弧\ PA'Q - 弧\ QAP = 弧\ PP' + 弧\ Q'Q = 2\times 弧\ PP' \fallingdotseq 2\times FF' = 4\times OF$$

ですから、最初にカレンダーを用いて計算した結果から

$$4\times OF = 9$$

つまり

$$OF = 9/4 \qquad （1）$$

となります。（単位は、地球が一日で公転軌道上を進む距離です。）

$$OF^2 = a^2 - b^2$$

ですから

$$a^2 - b^2 = 81/16 \qquad （2）$$

が得られます。楕円の周を地球が１年かけて回るわけですから、楕円の周長は 365 です。このことと(１)から、この楕円が円に非常に近いことが分かります。そこで楕円の周は（近似的に）半径 (a＋b)/2 の円の周に等しいと考えると

$$\pi(a+b)=365$$

つまり

$$a+b = 365/3.14 \qquad （3）$$

となります。(２)と(３)を連立方程式と見て解き、楕円の離心率 OF/OA を計算すると、

約　0.037

という結果が得られます。正しい値（ 0.0167）からは、ずれていますが、カレンダーだけをもとにした、かなり無茶な概算ですから、桁さえ合っていれば満足してよいでしょう。

２．数学はマジックに似ている

まず、線分ＡＢの両端の２点Ａ，Ｂに、それぞれ重さ a, b の２つの重りを配置します。このとき、この線分の重心は、ＡＢを b : a に内分する点Ｐになり「点Ａに a, 点Ｂに b と

いう重りの配置は「点Ｐに a+b」という配置と力学的には等価となります。この場合、点Ａ，Ｂの両方に下向きの力が働くとしているわけですが、仮に、一方には下向き、他方には上向きの力が働くとすると、これら２つの力がつり合う点は、内分点ではなく外分点になります。このようにして、内分と外分を同等に扱うことも可能なのですが、以下では簡単のため、内分点だけを考えることにします。

次に、⊿ＡＢＣの各頂点に重さ１の重りを配置します。このとき、辺ＢＣの重心はＢＣの中点Ｍにあり、２点Ｂ，Ｃに配置された重さ１の２つの重りを１点Ｍに配置された重さ２の１つの重りに置き換えて考えることができます。つまり、「⊿ＡＢＣの各頂点に配置された重さ１の３つの重り」は、「点Ａにある重さ１の重り＋点Ｍにある重さ２の重り」と等価になります。ところが、後者はさらに「線分ＡＭを２：１に内分する点Ｇにある重さ３の重り」と等価です。同様に考えて、最初の重りの配置は、線分ＣＡの中点をＮとするとき、「線分ＢＮを２：１に内分する点Ｈにある重さ３の重り」とも等価になることから、点Ｇと点Ｈは一致しなければなりません。これが「三角形の重心定理」です。（ベクトルを使えば、本質的に同じ論法で、「線分の重心」という力学的用語を持ち出さずに、重心定理が証明できることは、多くの高校教科書に出ている通りです。）

全く同じアイデアで、⊿ＡＢＣの頂点Ａ，Ｂ，Ｃのそれぞれに重さ a, b, c の３つの重りを配置したときの重心を考えることができます。この場合、辺ＢＣを c : b に内分する点を D としたとき、線分ＡＤを (b+c) : a に内分する点Ｇが全体の重心となります。また、ＣＡを a : c に内分する点をＥとしたとき、線分ＢＥを (a+c) : b に内分する点Ｈも重心となることから、点Ｇと点Ｈが一致することがわかります。これがチェバの定理です。（普通、チェバの定理と呼ばれる定理よりも、私たちが得た結果のほうが、いくらか強い主張になっています。）

全く同じアイデアを３次元空間内の４面体に適用することもできます。４つの頂点に重さ１の重りを配置した場合には「４面体の重心定理」が得られ、一般に４頂点に異なる重さを配置した場合には「３次元のチェバの定理」が得られます。当然、４次元以上に拡張することも、３次元以下のもっと複雑な図形に適用することもできます。たったひとつのアイデアから次々と幾らでも新しい定理が得られる様子はちょっとマジックみたいな気がしませんか。

この例に限らず、数学の定理は、一種のマジック、証明はその種明かしと考えることができます。２次方程式の解の公式だって、立派なマジックです。ｙ＝左辺とおいた式のグラフ（放物線）の軸がｙ軸と一致するようなタイプの２次方程式なら簡単に解ける、という点に目をつけると、一般の２次方程式を解くには放物線の軸がｙ軸と一致するように平行移動すればよいことがわかります。これが、解の公式の種明かし、というわけです。

私が高校生のときには、１年生の数学のほとんどは、初等幾何の難しい問題の証明ばかりでした。試験のときも２題くらいしか問題は出題されず、しかもどちらも難しいので、うまくいっても５０点、下手をすると０点になるという恐怖がありました。２年生になっ

て初めて座標を使って、計算で証明することもできる、と教わったときの衝撃は、今も忘れることができません。大掛かりなイリュージョンに茫然としたというのに近い、しかしもっと深い、目も眩むような感動でした。座標というアイデアは最高のマジックだと思います。

私たち人間は空間図形の認識が苦手のようで、空間図形の性質のなかにはマジックのような趣のあるものが沢山あります。そのうちのひとつを紹介しましょう。

底面ＢＣＤＥが正方形、４つの側面ＡＢＣ，ＡＣＤ，ＡＤＥ，ＡＥＢがすべて正三角形であるような立体を考えます。普通、ピラミッド形といわれる図形です。もうひとつ、正４面体ＰＱＲＳを考えます。ただし、辺ＡＢの長さと辺ＰＱの長さは一致させておきます。さて、⊿ＡＢＣと⊿ＰＱＲは同じ大きさの正三角形ですので、これらをぴったり重ね合わせることができます。このとき、（驚くべきことに）平面ＰＲＳと平面ＡＣＤは同一平面となります。実際に、ピラミッドと正４面体をボール紙か何かで作って実演すると、マジック的な効果が出ます。「えーっ、どうして」という感じです。自分の目が信じられない、という反応を示す人もいます。

それでは種明かしをしましょう。

最初に、ＨＩＪＫという大きな正４面体を考えます。この正４面体の６本の辺の中点を結ぶと、正８面体になりますが、その正８面体を二つに切ったものがピラミッド形です。例えば、ＨＩの中点を B、ＨＪの中点を C，ＪＫの中点を D，ＫＩの中点を E とすると、ＢＣＤＥは正方形で、この正方形の４頂点とＨＫの中点 A を結ぶと、ピラミッドが完成します。このピラミッドＡＢＣＤＥと小さい正４面体ＨＢＣＡはひとつの面（正三角形ＡＢＣ）を共有しています。そして、面ＨＣＡと面ＡＣＤは、もともと大きな正４面体ＨＩＪＫのひとつの面ＨＪＫの一部ですから、当然、同一平面上にあります。ピラミッドと正４面体の不思議な関係は、実際には証明の必要さえないほど「当たり前」のことであったというのが「種明かし」です。

３．数学は恋文に似ている

伝えようと思えば思うほど伝わらないものは「恋心」と相場が決まっています。とくに「この相手にだけはどうしても伝えたい」と想う相手に限って自分の気持ちは全く判ってもらえません。例外はただひとつ。相手も最初から好意を持っていた場合だけ・・・。数学もそうです。何とか分かってもらおうと説明に工夫をこらしてみても、なかなか理解してもらえません。しかし、分かってくれる相手の場合には、ほとんど説明らしいことを言わなくても、一瞬で伝わってしまいます。数学は論理的な学問で、論理的思考ができる人なら誰でも理解できるはず、というのが建前になっていますが、果たしてそうでしょうか？私にしても、この講演をお聞きの皆さんにしても、世間の標準からすると「数学が得意な人」の部類に入ることは間違いありません。こういう私たちは「数学が得意でない人」の

気持ちというものを理解することが極めて不得手です。

以前、私は文学部学生向けの数学の授業と（理系学生向けの）「数学科教育法」の授業を同時に担当したことがあります。そのとき私は文学部の学生に対し「高校までの算数・数学の中で、ここだけは、どうしても納得できない、と思う点をレポートに書いて提出しなさい。」と求め、そうして集めたレポートを分類しておいて「数学科教育法」の授業の中で「この質問、疑問にどう答えるか、レポートに自分の工夫を書いて提出しなさい。」と要求しました。文学部学生の「納得できない集」の中に「分数の割り算はどうして分母と分子を逆にして掛けるのか。そもそも２分の１を３分の２で割る、とは何のことなのか？」や「0.9999…= 1 はおかしいと思う。」「負の数と負の数を掛けて、どうして正の数になるのか、分からない。」「２乗して－1 になる数なんてナンセンス」などの言わば「定番」が含まれていたのは、こちらの予想の範囲内だったのですが、全く予想していなかったものもありました。それについては後で話します。いずれにせよ、この経験から、はっきり分かったのは「文系学生に論理的思考力がない、というのは大きな間違い」ということでした。文系学生が「納得できない」とした点は、多くの場合、確かに教科書や（伝統的な）教え方に不備が感じられる箇所でした。理系の学生の方が幼稚で、先生の言うことに疑問を持たないタイプが多いのに比べ、文学部学生には、自己主張が強く、自分自身で考えようとするタイプの人が多く、その為に却って数学が分からなくなってしまう、という傾向が見られました。その証拠に、文学部学生から出された疑問点に対して、かなりの（：幸いにも、全ての、ではありません）理系学生が途方にくれる様子が見られました。「そんなこと、考えたこともない」という感じです。

文学部学生から示された「納得できない集」の中で、私の予想になかったのは「数学的帰納法」に関するものでした。ある学生が次のように主張していたのです。

「数学的帰納法では、まず $n = 1$ の場合に命題が成り立つことを示し、次に $n = k$ の場合に成り立つとして、$n = k+1$ の場合を示します。自分が変だと思うのは、$n = k$ の場合に成り立つ、とする部分です。このときの k は任意の自然数ですから、$n = k$ のときに成り立つと仮定すると、すべての自然数で成り立つと仮定したことになり、初めから何も証明する必要がないように思います。」

もちろん、これはとんでもない誤解で、落語か漫才のお笑いネタのようにおかしい(funny) ので、「数学科教育法」の授業で紹介したときには、理系の学生の大爆笑を期待していたのですが、驚いたことに教室内はシーンとしてしまい、「本当にそうだ。今まで気付かなかったけれど、数学的帰納法は確かにヘンだ。」 という反応を示す学生が何人も出てきたのです。これには私も慌てましたが、気を取り直して、数学的帰納法の良く知られた説明（「将棋の駒を立てて１列に並べ、k 枚目の駒が倒れたら(k+1)枚目も押されて倒れるように間隔を調整しておく。１枚目を指で倒せば、全ての駒が自動的に倒れる。」）を例示して「数学的帰納法を説明するうまい工夫を自分で考える」ことをレポート課題としました。以下で、そのときのレポートから２つほど紹介します。

①（伝言ゲーム）１番目、２番目、３番目、・・・と人が一列に並んでいる。１番目の人は紙に書いたある情報を（列外の人から）見せられ、それを２番目の人に伝える。２番目の人は３番目に伝え、３番目は４番目に伝え、以下同様に伝えていく。１番目の人が受け取った情報が正しく、k 番目の人が自分の聞いたことを、(k+1) 番目の人に正確に伝えるなら、任意の n 番目の人が受け取る情報は正しい。

②（ティッシュの箱）新品のティッシュの箱がある。１枚目の紙は箱から取り出せる。k 枚目の紙が取り出せるなら、続いて(k+1) 枚目の紙も取り出せるようになっているとする。このとき、全ての紙は取り出せる。

どちらも、数学的帰納法に出てくる k という文字の果たす役割を、うまく説明するのに成功していると思います。教科書執筆者として、私自身も教科書の文章は、随分、注意して書いている積もりですが、この k の場合のように、数学における文字やことばの使用には、いろいろな側面、言い換えれば、柔軟性、があり、全ての人に誤解を与えないように書くのは至難の業です。この柔軟性（いいかげんさ）は「数学が生きているあかし」でもあるだけに執筆者の悩みは深いのです。

４．数学は格闘技に似ている

大きくて強い敵にワザをかけるには、まず敵を揺さぶって動かす。動いたことによって生じたスキを狙ってワザをかければよい。揺さぶっても動かないくらい強い敵に対したときは、自分の方が動けばよい。そうすれば、相対的に、相手が動いたのと同じ効果がある。数学で難問（：受験数学の難問という意味ではなく、数学上の難問）を解くときにも同じことがいえます。・・・・（続きは、会場にて）

５．数学はお笑い（漫才）に似ている

次の「比例式」を見て下さい。

ボケ：ツッコミ＝アイデア：論理

お笑いの源泉はボケ（＝予期せぬ非常識な言動）にあるように、数学の源泉はアイデア（＝それまで誰にも気付かれなかった意外な考え方）にあります。ツッコミはボケを生かす役割であるように、論理はアイデアを生かすためのものです。そして、どちらか一方が欠けてもお笑い（数学）は成り立ちません。・・・・（続きは、会場にて）

６.「Ｒ１８指定版　アキレスと亀」（おまけ）

話の展開がだいぶ強引かつアヤシクなり、タイトルからずれてきたかもしれません。そろそろ終わりにしたいと思いますが、おまけとして、１８歳以下の人には聞かせられない大人の話題をひとつ。

まずはＲ指定でない、普通の「アキレスと亀」の話から始めます。良くご存知のように、これはゼノンのパラドックスと呼ばれる有名なパラドックスのひとつです。登場するのは足の速いアキレス（ギリシャ神話の神様）と足の遅い亀です。亀が少し早く走り出し、アキレスが後から追いかけるという設定になっています。アキレスが走り始めた時点に、亀がいた場所Ａまで、アキレスが走っていくと、そのときには亀は少し先のＡ’まで行っている。アキレスがＡ’に到達すると、亀はまた少し先のＡ”まで進んでいる。以下、同様にアキレスが亀のいたところまで行くたびに、亀はそれよりいつも少し先に進んでいるので、アキレスは、永遠に亀に追いつけない。これはパラドックスだ、というわけです。普通、このパラドックスは次のようにして「解決」します。計算を簡単にするため、（適当な単位のもとで）亀が１だけ進んだ瞬間にアキレスが亀を追いかけ始めるとし、亀の速度は１、アキレスの速度は２とします。アキレスが１進むまでの時間に亀は１/２進みます。そして、アキレスが１/２進む間に、亀は１/２^2 進みます。以下、同様ですから、ゼノンのパラドックスで「永遠に」と述べている時間の間に（つまり、アキレスが亀に追いつけない時間の間に）、亀が進む距離は

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n+\cdots \qquad (4)$$

（ただし、r＝１/２）となります。無限等比数列の和の公式を用いると

$$|r|<1 \qquad (5)$$

のとき、(４)は

$$1/(1-r) \qquad (6)$$

に等しいので、アキレスが追いつくまでに亀が進む距離は２となります。つまり、亀が２進んだときにアキレスは亀に追いつくわけです。

（註）ゼノンは、単に、アキレスが亀に追いつくまでの時間を、無限個の時間間隔に分割してみせているだけでした。和（４）を n=100 の項まで、或いは n=1000 の項まで・・・と全ての項を省略せずに書き上げる（読み上げる）には、多くの時間がかかりますが、その時間とアキレスが亀に追いつくのに必要な時間とは関係がありません。

そもそも、古代ギリシャの数学には「時間」の観念が取り入れられておらず、いわば「静的な世界（凍りついた世界）の数学」でした。彼らの「静的な世界の数学」で無理に運動を扱ったためにパラドックス（のようなもの）が生じてしまった、というのが私の考えです。ただし、時間をもう一本の座標軸と考えることは、確かに一歩前進ではありますが、それによって時間を完全に数学の中に取り込めたわけではありません。時間をそのように「静的」にとらえた途端、再び世界は凍りつくからです。いつか人間が時間を数学的に捉えられることが、あるのかどうか、それは現代でも分かりません。

以上が、Ｒ指定でない、健全な青少年向けの「アキレスと亀」のお話でした。ここから大人の時間ということで、Ｒ18 指定版（すなわち、青少年の心身の健全な発育に悪い影響を与える可能性があるので、高校生などには決して話してはいけないという警告つき）の「アキレスと亀」に移りたいと思います。今度は、アキレスの方が先に走り出し、後から亀が追いかけるという妖しげな設定にします。計算を簡単にするために、アキレスが１だけ進んだ瞬間に亀がアキレスを追いかけ始めるとし、前と同じく、亀の速度は１、アキレスの速度は２とします。問題は「亀は、いつアキレスに追いつくか？」です。「健全版」と同様に考えることにすると、亀が１進むまでの時間にアキレスは２進みます。そして、亀が２進む間に、アキレスは2^2 進みます。以下、同様ですから、亀がアキレスに追いつくまでにアキレスが進む距離は(４)式（ただし、r＝２）で与えられます。この場合、条件(５)は満たされていないので、公式(６)は使えない、というのは「良識」のある人の考えることで、私たちは、今、良識を捨て去り、気儘に振舞おうという気分でいますので、(５)は無視し、(６)に r＝２を代入します。得られる値は －１です。つまり

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots=-1$$

という社会常識を踏みにじるような結果に到達しました。ところで、最初にアキレスや亀が走り出した方角を東とすると、距離－１の地点とは、西へ１行った点、ということに他なりません。仮に、アキレスと亀がずっと前から走っていたとすれば、アキレスが－１の地点（西へ１行った場所）にいたとき、亀はどこにいたのでしょう？そうです。まさに、そのとき亀はアキレスのいたのと同じ場所にいて、アキレスがそこから２進んだとき、亀は１だけ進み、この瞬間を私たちは亀がアキレスを追いかけ始めた瞬間、と認定したのでした。

時間をさかのぼれば、確かに－１の地点で「亀はアキレスに追いつく」のです！？