空間ベクトル速修コース２００９

(数学入門演習資料)

私たちは皆、３次元の世界に住んでいる。しかし、絵もテレビ画面も２次元だし、視覚を感じる網膜だって２次元である。だから、実は、３次元のことは誰でも不慣れで、誰でも苦手なのである。その苦手な３次元を分かりやすくする便利な道具が３次元ベクトルなのだが、これの使い方を理解するためには、やはり３次元について最低限の知識は必要である。それを以下で説明しよう。

「時間」も入れれば、４次元に住んでいることになる。

１．１．平面ベクトルとは何か

まずは平面ベクトルから始める。それなら知っていると言わないで読んでもらいたい。高校で学んだことは、いったん白紙に戻して、改めて最初から考え直してみることにしよう。ただし、以下で述べることは高校の教科書に書いてあることと違うわけではなく、別の見地から見直しているだけである。

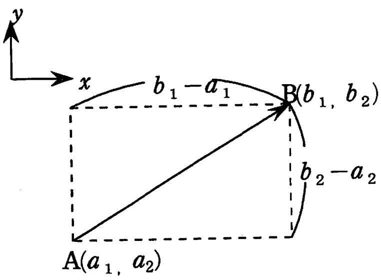
xy 平面内の点 $A(a_1, a_2)$ を始点とし、別の点 $B(b_1, b_2)$ を終点とする矢印（有向線分）を AB とかく。逆向きの矢印、つまり B を始点とし、A を終点とする矢印は BA とかく。矢印 AB には**幅**と**高さ**がある。

幅とは、A と B の x 座標の差 $b_1 - a_1$ のこと、

高さとは、A と B の y 座標の差 $b_2 - a_2$ のこと

である。これらは、正の値であることも、負であることも、0 になることもあるが、正になるときには、矢印 AB がぴったり収納できるような直方形（右の図を見よ）の幅と高さに等しい。

辺が x 軸または y 軸に平行な長方形だけを考えている。

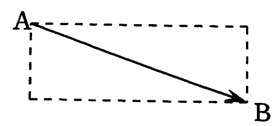


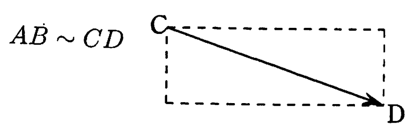
xy 平面内の点 $C(c_1, c_2)$ を始点とし、別の点 $D(d_1, d_2)$ を終点とする、もうひとつの矢印 CD を考える。２つの矢印 AB と CD の**向きと長さが同じ**（記号では $AB \sim CD$ とかく）とは、２つの矢印の幅と高さが、それぞれ一致することである。言い換えると

$$AB \sim CD \quad \Longleftrightarrow \quad b_1 - a_1 = d_1 - c_1,\ \ b_2 - a_2 = d_2 - c_2$$

ということになる。そこで

「高さ」が負であるような例





$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

と置き、これを矢印 AB で決まる**ベクトル**ということにする。つまり、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とは、矢印 AB の幅と高さという２つのデータを縦に並べたもののことである。横に並べず、縦に並べたのは、点の座標と混同しないため、と（今のところ）考えておいて欲しい。

ベクトルをこのように定義すると

「定義」とは、何かの意味をはっきりと定めることである。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Longleftrightarrow \quad AB \sim CD$$

となる。

1．2．平面ベクトルの加法

前の節で述べたように、平面ベクトルとは、ふたつの実数 p_1, p_2 を縦に並べたもの

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

のことである。xy 平面の原点を O とし、点 $P(p_1, p_2)$ をとると、このベクトルは有向線分 OP が表すベクトル $\overrightarrow{OP}$ であり、$OP \sim QR$ である別の有向線分 QR が表すベクトル $\overrightarrow{QR}$ でもある。点の座標 (p_1, p_2) が「位置情報」を表すのに対し、ベクトル $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は「移動情報」を表すと考えられる。つまり、ベクトル $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ は「現在位置から、東へ p_1、北へ p_2 の地点へ移動しなさい。」或いは、同じことだが「現在位置から、矢印 OP の指す方向に矢印の長さだけ移動しなさい。」という「指令」であると解釈するのである。（だから $OP \sim QR$ のとき、$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{QR}$ は同じベクトル（同じ指令）なのである。）移動情報については「ある移動に引き続き、別の移動を行う」という意味での**加法**を考えることができる。それが高校で学ぶ

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 \\ p_2 + q_2 \end{pmatrix}$$

という「公式」である。この公式は「東へ p_1、北へ p_2」に引き続き「東へ q_1、北へ q_2」という２つの指令を次々と実行することは「東へ $p_1 + q_1$、北へ $p_2 + q_2$ 」という１つの指令を実行することと同じ、という意味である。また

$$-\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$$

という公式は「東へ p_1、北へ p_2」という指令を取り消して元へ戻す指令は「東へ $-p_1$、北へ $-p_2$」という指令であることを意味している。もちろん、零ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は「何もせず、その地点にとどまれ」という指令である。

1．3．平面ベクトルの内積

この節については、高校の教科書に付け加えたいことはない。内積などの記号が高校と大学では（どういうわけか）異なることを注意するだけである。２つのベクトル $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ の**内積**は

$$(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}) = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

で定義する。また、ベクトル $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ の**長さ**は

$$\left\|\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

で定義する。また、２つの零でない平面ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ のなす**角**とは、対応する有向線分が（例えば、どちらも原点 O を始点としているとき）なす角であるとして、それを θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とかくと

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{p}\,,\,\mathbf{q})}{||\mathbf{p}|| \cdot ||\mathbf{q}||}$$

証明には、余弦定理を使う。高校の教科書（数学 B) に書いてある。

という美しい公式が成立する。蛇足ながら、この式のどこが「美しい」かを解説すると、左辺の図形的な量と右辺の計算的な量という全く性格が異なる（ように見える）ものが、ズバリ等号で結ばれているところ、ということになる。

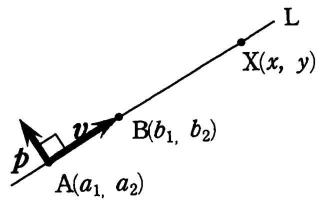
この公式を踏まえて、２つの平面ベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$（←零であっても構わない）が**直交する**（記号では $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ とかく）とは

$$(\mathbf{p}\,,\,\mathbf{q}) = 0$$

が成り立つことである、と定義する。

１．４．平面における直線の方程式

xy 平面における直線 L の上に相異なる２点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ をとり、ベクトル $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ を考える。また、$\mathbf{v}$ に直交する零ではないベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ もとっておく。直線 L 上の任意の点 $X(x, y)$ が満たす条件（正確に言うと、平面上の点 X が直線 L 上にあるための必要十分条件）を表す式を、**平面における直線 L の方程式**という。この方程式には、次の２通りの書き方がある。



（1）(「x と y の１次式 $= 0$」の形の方程式)
常に、$\mathbf{p} \perp \overrightarrow{AX}$ が成り立つ。

$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix}$$

であるから、この条件は内積を用いて

$$p_1(x - a_1) + p_2(y - a_2) = 0$$

と書くことができる。一般に、p_1 と p_2 の少なくともどちらかが 0 でないとき、$p_1x + p_2y + q = 0$ という形の式、すなわち「x と y についての１次式 $= 0$」の形の式、は平面における直線の方程式である。

（2）（1コの媒介変数を用いた方程式）

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とおく。つまり、$v_1 = b_1 - a_1,\ v_2 = b_2 - a_2$ である。このとき

$$\overrightarrow{AX} = s\mathbf{v}$$

となる実数 s があり、s が実数全体を動くと、X は直線 L 上の点の全体を動く。よって

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$x = a_1 + sv_1,\ y = a_2 + sv_2$$

は直線の方程式である。ここで、s は任意の実数を動く変数で**媒介変数**（または**パラメータ**）と呼ばれる。v_1 と v_2 の少なくとも一方は0でないので、（2）の式から s を消去でき、その結果は（1）の形の方程式になる。

２．１．空間ベクトルとは何か

xyz 空間内の点 $A(a_1, a_2 a_3)$ を始点とし、別の点 $B(b_1, b_2, b_3)$ を終点とする矢印（有向線分）を AB とかく。反対向きの矢印、つまり B を始点、A を終点とする矢印は BA とかく。

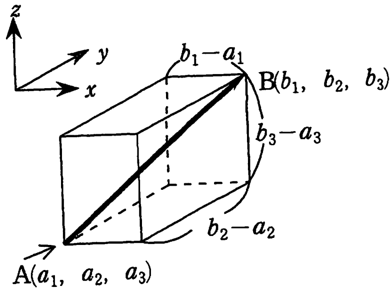
矢印 AB には、**幅**と**奥行き**と**高さ**がある。

幅とは、A と B の x 座標の差 $b_1 - a_1$ のこと、

奥行きとは、A と B の y 座標の差 $b_2 - a_2$ のこと、

高さとは、A と B の z 座標の差 $b_3 - a_3$ のこと

である。これらは、正の値であることも、負であることも、0になることもあるが、正になるときには、矢印 AB がぴったり収納できるような直方体（図を見よ）の幅、奥行き、高さに等しい。xyz 空間内の点 $C(c_1, c_2, c_3)$ を始点とし、別の点 $D(d_1, d_2, d_3)$ を終点とする、もうひとつの矢印 CD を考える。２つの矢印 AB と CD の **向きと長さが同じ**（記号では $AB \sim CD$ とかく）とは、２つの矢印の幅と奥行きと高さが、それぞれ一致することである。言い換えると



辺が x 軸、y 軸、または z 軸に平行であるような直方体だけを考えている。

$$AB \sim CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1,\ b_2 - a_2 = d_2 - c_2,\ b_3 - a_3 = d_3 - c_3$$

ということになる。そこで

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

と置き、これを矢印 AB で決まる**ベクトル**ということにする。つまり、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とは、矢印 AB の幅と奥行きと高さという３つのデータ

を縦に並べたもののことである。
ベクトルをこのように定義すると

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff AB \sim CD$$

となる。

２．２．空間ベクトルの加法

平面ベクトルの場合と同様だが、「東」「北」のほかに「上」という３番目の方向がある点だけが違う。通常の人間にとっては垂直方向の移動指令の実行は難しいが、バットマンか鉄腕アトムか孫悟空にでもなった積もりで考えて欲しい。ドラえもんからタケコプターを借りてもよい。

宝塚に「手塚治虫記念館」がある。

２．３．空間ベクトルの内積

これも平面ベクトルの場合と同様である。内積の定義が

$$\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}\right) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$$

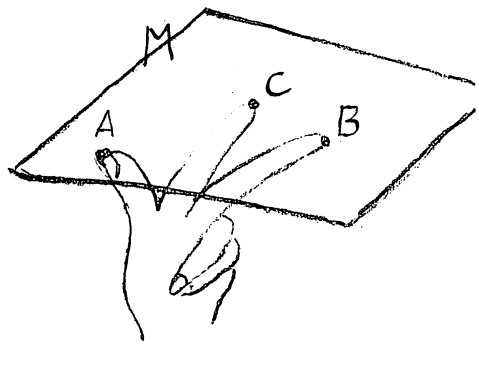
になり、ベクトルの長さの定義が

$$\left\| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

となるだけで、後は全て同じである。例えば、$\cos\theta$ を内積で表す「美しい式」もそのまま同じ形で成り立つ。これを使えば、絵を描くのさえ難しい３次元ベクトルの間の角が単純な計算だけで分かってしまう〜♪

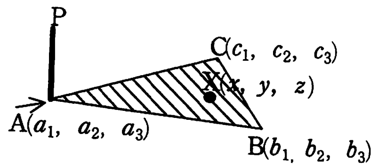
２．４．空間における平面の方程式

xyz 空間内の平面 M を考える。高校教科書には空間内の平面としては xy 平面、yz 平面、zx 平面の３つしか出ていないが、もちろん、こういう特殊な平面だけでなく「傾いた平面」がいっぱいあるから、そのうちの勝手な１つを考えるということである。直線の場合は、その上の相異なる２点をとるだけで、元の直線は決まってしまうが、平面の場合は２点では無理で、少なくとも３点必要である。それが証拠に、２本の指先でノートを支えることは（特別な技術の持ち主でない限り）無理だが、３本なら誰でもできる。その３本の指先も３角形を成していないといけない。３本の指先が一直線上に並んでいては、ノートは支えられない。つまり、空間内の平面 M は、その上の「一直線上にはない３点」を指定すれば決まってしまう。そのような３点を $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$ としよう。



平面 M 上の任意の点 $X(x, y, z)$ が満たす条件（正確に言うと、空間内の $X(x, y, z)$ が平面 M 上にあるための必要十分条件）を表す式を、**空間における平面 M の方程式**という。この方程式には，次の２通りの書き

方がある。
（1）（「x, y, z の１次式 $= 0$」の形の方程式）
ΔABC を敷地とする家を建てると考えて、点 A のところに垂直な柱 AP を立てよう。柱 AP は平面 M 上の A を通る全ての直線に直交する。（そうでないと、柱がどっちかの方向に傾いて立っていることになる。）$\mathbf{p} = \overrightarrow{AP}$ とおき、$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ としよう。上で述べたことから、常に $\mathbf{p} \perp \overrightarrow{AX}$ が成り立つ。



$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix}$$

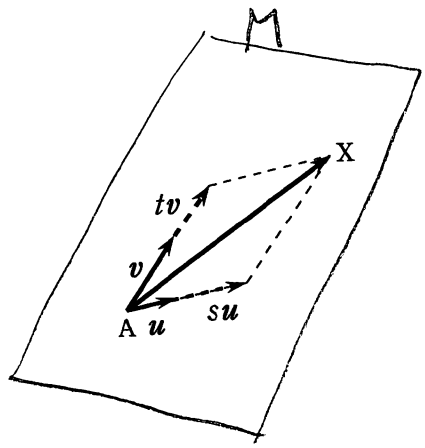
であるから、この条件は内積を用いて

$$p_1(x - a_1) + p_2(y - a_2) + p_3(z - a_3) = 0$$

とかける。これが M の方程式である。一般に、p_1, p_2, p_3 のうち少なくとも１つは０でないとき、$p_1x + p_2y + p_3z + q = 0$ の形の式、つまり「x, y, z の１次式 $= 0$」の形の式、は空間における平面の方程式である。
（2）（２コの媒介変数を用いた方程式）
$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$ とおく。すなわち

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

である。X を平面 M 上の任意の点とすると



$$\overrightarrow{AX} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

となる実数 s, t がとれ、s, t が実数全体を動くと、X は平面上の点の全体を動く。（右の図を見よ）
よって

$$\begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}、$$

すなわち

$$x = a_1 + su_1 + tv_1,\ y = a_2 + su_2 + tv_2,\ z = a_3 + su_3 + tv_3$$

は空間における平面の方程式である。s と t は**媒介変数**（または**パラメータ**）と呼ばれる変数である。平面内の直線のときには１コしか必要でなかった媒介変数が２コ必要になるのは、平面が「２次元」であるせいで

ある。この３式から媒介変数を消去すると、（１）の形の方程式が得られる。逆に、（１）の形の方程式が与えられたとする。このとき p_1,p_2,p_3 の少なくとも１つは０でない。例えば $p_1 \neq 0$ とすると、（１）の形の方程式は

$$x = -\frac{p_2}{p_1}y - \frac{p_3}{p_1}z - \frac{q}{p_1}$$

と変形できる。この式は y と z が勝手な値をとることができることを示している。(それに応じて、x の値を決められるから。) そこで、$y=s,\ z=t$ (s と t は勝手な実数) とおくと

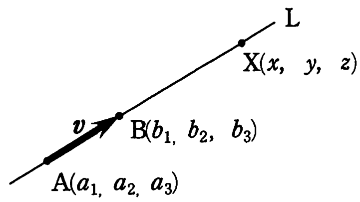
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s(p_2/p_1) - t(p_3/p_1) - (q/p_1) \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

$$= s\begin{pmatrix} -(p_2/p_1) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -(p_3/p_1) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(q/p_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これは（２）の形の方程式になっている。

２．５．空間における直線の方程式

xyz 空間における直線 L の上に相異なる２点 $A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3)$ をとり、ベクトル $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ を考える。直線 L 上の任意の点 $X(x,y,z)$ が満たす条件（正確に言うと、空間内の点 X が直線 L 上にあるための必要十分条件）を表す式を、**空間における直線 L の方程式**という。この方程式には、次の２通りの書き方がある。



（１）(「x,y,z の１次式 $=0$」の形の式２コの連立方程式)

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ とする。つまり、$v_1 = b_1 - a_1,\ v_2 = b_2 - a_2,\ v_3 = b_3 - a_3$ である。$\overrightarrow{AX} = s\mathbf{v}$ となる実数 s がある。

$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix}$$

であるから、この式は

$$\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

つまり

$$x-a_1 = sv_1,\ y-a_2 = sv_2,\ z-a_3 = sv_3$$

とかける。v_1,v_2,v_3 のどれも０でないときには、これら３式から s を消去して

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

が得られる。これが L の方程式である。v_1, v_2, v_3 のうち１コだけが０のとき、例えば $v_1 = 0$ で v_2, v_3 が０でないときは

$$x - a_1 = 0,\ \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

が L の方程式となり、v_1, v_2, v_3 のうち２コだけが０のとき、例えば $v_1 = v_2 = 0,\ v_3 \neq 0$ のとき

$$x - a_1 = 0,\ y - a_2 = 0$$

が直線 L の方程式になる。これでは、いろいろな場合が有りすぎて、煩雑なので、普通は「分母が０のときは分子も０」という約束のもとで

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

を空間における直線の方程式と呼ぶ。これは $\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2}$ と $\frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}$ という２コの方程式からなる連立１次方程式と考えることができる。

（２）（１コの媒介変数を用いた方程式）
すぐ上の（１）で出てきた式 $\overrightarrow{AX} = s\mathbf{v}$ において、s が実数全体を動くと、X は L 上の点の全体を動く。よって、これを書き換えた式（これも（１）で既に出てきた）

$$\begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

つまり

$$x = a_1 + sv_1,\ y = a_2 + sv_2,\ z = a_3 + sv_3$$

が、空間における直線 L の方程式で、s が**媒介変数**（または**パラメータ**）である。空間で考えていても、直線自体は「１次元」なので媒介変数は１コしか必要でないのである。

２．７．空間における２コの平面の交わり

xyz 空間における２つの平面 M と N を考える。２．４節で述べたように M, N の方程式はそれぞれ

$$p_1x + p_2y + p_3z + q = 0, \qquad r_1x + qr_2y + r_3z + s = 0$$

という形にかける。言い換えれば

$$M = \{\, X(x,y,z) \mid\ p_1x + p_2y + p_3z + q = 0\}$$

$$N = \{\, X(x,y,z) \mid\ r_1x + r_2y + r_3z + s = 0\}$$

ということである。実は、これらの式は集合についての等式である。左辺の M や N は平面そのものというよりも、それらの平面に含まれる点

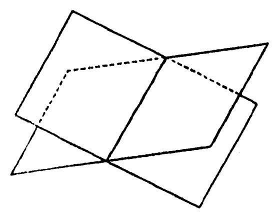
の全体からなる集合と考えている。また、右辺は縦棒 | より右に書いた条件を満たすような点 $X(x,y,z)$ の全体からなる集合である。
一般に、２つの集合 S,T の共通部分（交わり）は $S\cap T$ という記号で表される。従って、２つの平面 M,N の交わりは $M\cap N$ で表される。
上で述べたことから

$$M\cap N=\{\,X(x,y,z)\mid p_1x+p_2y+p_3z+q=0,\ r_1x+r_2y+r_3z+s=0\}$$

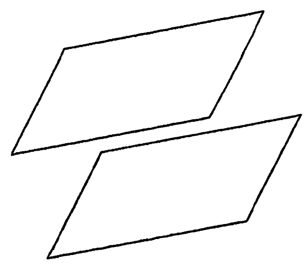
であることがわかる。つまり、空間内の２平面の交わりは、未知数 x,y,z についての２個の１次方程式を連立させたもの

$$\begin{cases} p_1x+p_2y+p_3z+q=0 \\ r_1x+r_2y+r_3z+s=0 \end{cases}$$

の解（これら２式を同時に満たす組 (x,y,z)）の全体として計算的に把握することができる。次の３通りの場合がある。



１．２平面は一直線において交わる。このとき、連立方程式を解くことによりその直線の方程式を求めることができる。
２．２平面は共通部分を持たない、つまり平行である。この場合、連立方程式は解をもたない。

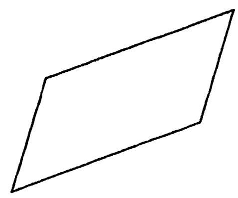


３．２平面は一致する。この場合、連立方程式は実質的には１個の方程式からなる。
１、２，３の例をひとつずつあげておく。
１．

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$$

２．

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$



３．

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases}$$

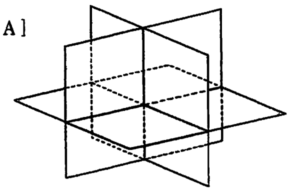
２．８．空間における３コの平面の交わり
これは次の連立１次方程式の解の全体として把握できる。

$$\begin{cases} p_1x+p_2y+p_3z+q=0 \\ r_1x+r_2y+r_3z+s=0 \\ t_1x+t_2y+t_3z+u=0 \end{cases}$$

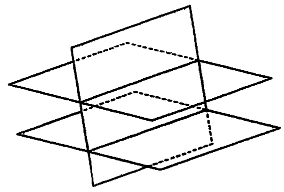
最も典型的なのは、連立１次方程式の解として、ただ１組の (x,y,z) が求まるときで、この場合は３平面の交わりは、その解 (x,y,z) を座標と

する１点だけからなる。しかし、これ以外にさまざまな場合がある。もうそろそろ、このコースを終わりにしたいので、図だけをあげておくことにしよう。

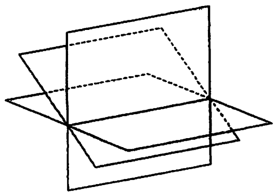
[A]



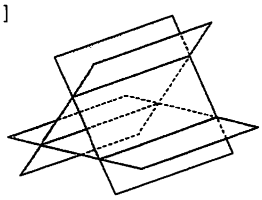
[D]



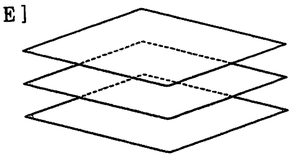
[B]



[C]



[E]



ｎ．１．ｎ次元空間／ｎ次元ベクトルへ向けて

高校の数学でも出てくる $y = f(x)$ という関数は、あるひとつの要因 x から、ひとつの結果 y が出てくる様子を表している。例えば、時速 a km の等速で走る車は、x 時間後には、y km だけ進んでいる、とすると、$y = ax$ となる。

しかし、世の中はそんな簡単なものでないことは誰でも知っている。たいていの事柄には複数の要因がからむ。そういった現実の事柄を数学的にとらえるには

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

といったタイプの関数を考える必要がある。多変数 $x_1, x_2, ..., x_n$ の関数である。（これに対して、$y = f(x)$ は１変数の関数という。）変数 $x_1, x_2, ...$ はそれぞれ別々の要因を数値化したものを表わし、y はそれから生じる結果を表わすわけである。このような関数の最大値や最小値を計算するには、多変数の微積分が必要になる。このような関数のグラフを考えようとすれば、ｎ次元空間が必要になる。だから、ｎ次元というのは、現実問題を考える上でも避けて通ることができないし、理系だけでなく、経済など、文系でも常識になりつつあるというか、もう、既になっている。

本当は $(n+1)$ 次元空間が必要。

ｎ次元を目に見えるように頭に描くのは、人間には無理である。しかし、目には見えなくても、理解することはできる。それは、ちょうど、３次元が苦手な私たちがベクトルの助けを借りて、３次元空間内の平面や直線を、計算的に理解していくことができるのと同じである。だから、今のうちに３次元に慣れてもらいたい。そこのところを経験しておけば、ｎ次元空間だって、どうってことはないのだ。それを願って、この資料を作った。いくらかでも役に立てば幸いである。　　　（川中　宣明）