# 自己紹介＋数学研究のすすめ

川中　宣明（かわなか　のりあき）

私は平成 18 年 4 月に満 60 歳になりました。60 代にはなりましたが、それまで悩まされていた五十肩が嘘のように治ったこと以外には、これといった変化もなく、毎日、元気に数学の研究に打ち込んでいます。この年になってやっと気付いたのですが、どうやら私は数学が好きであるようです。それで、数学の研究を志す若い人に向けて私なりにメッセージを書いてみようと思うのですが、こういう肝心なときに限って、ことばというものは無力です。

「語り得ぬことについては沈黙しなければならない。」

（ウィトゲンシュタイン「論理哲学論考」）

「ことばにすれば、うそに染まる。」（もんたよしのり「ダンシング・オールナイト」）

それに、ことばで語らず、数学でこそ語るのが数学研究者の心意気です。

それを承知で何か書いてみましょう。

個人的なことですが、私が数学に興味をもつようになった切っかけ（のひとつ）は、小・中学校を通じて、そして今も変わらぬ、私の愛読書「ファーブル昆虫記」（岩波文庫）にあります。余り知られていないように思うのですが、この本にはファーブルが数学を独学で学んで（今で言えば理学部数学科を卒業したのと同じくらいの）資格を手に入れた話が書かれています。ファーブルは中学か何かの臨時教員だったのですが、同僚の先生が持っている大学レベルの数学の教科書を読みたくて、夜中に職員室に忍び込んでこっそり読んで勉強したそうです。その真似をしようとした私（当時、高 1）は近所にあった千林商店街の深田書店の書棚にマージナウ、マーフィ著「物理化学のための数学」（共立全書）という大学の数学の本らしきものを見つけて（こっそり）立ち読みを始めました。単なる街の本屋に理工学の専門書が置いてあったのは、近くに大阪工業大学があったからでしょう。マージナウ、マーフィの本の最初に開けたページには熱力学に絡めて偏微分の解説がしてあったのですが、熱力学はもちろん、一変数の微積分も知らない私に理解できる筈がありません。ちんぷんかんぷんの思いで最初の方のページに戻ってみると、分かりそうなところ（微分・積分の初歩）があったので、そこを覚えて帰って家で計算をしてみました。

こんなに面白いものがあったのかと思いました。

私には生物の世界と数学の世界を比べる癖があります。生物の世界で最も感動的なのは、統一性（unity）と多様性（diversity）の絶妙のバランスです。すべての（或いは、ほとんどすべての）生物は DNA を遺伝情報として利用しているという意味で基本的に同一のシステムと考えられます。（私は生物学を専門にしているわけではないので、断言するのもどうかとは思いますが、面倒だから断言します。）また、生態学的に見ても、

あらゆる生物は互いに微妙に依存しあいながら全体として統一的な世界を形成しています。これが生物世界の統一性です。一方、地球上（地球「内部」も含む）の生物種の数は膨大で、しかも個々の生物種は形態においても、生態においても、想像を絶する多様性を示しています。そしてこの多様性こそが生物世界の維持を最も深いところで保証しているように思われます。

数学世界の美しさも統一性と多様性の絶妙のバランスにあると私は考えます。現代数学においては「統一性」（例えば、異なる分野の間の思いがけない関連）のみが、一方的に強調される傾向がありますが、多様なものが統一されるからこそ素晴らしいのであって、基盤にあるのは、あくまで数学世界の多様性である、と私は考えます。19 世紀の数学が豊穣な多様性を生み出していたからこそ、20 世紀の数学は統一性をめざすことができたのです。

「我々はいつまでも 19 世紀の脛を齧っているべきなのか？」

（谷山豊「A. Weil をめぐって」）

いずれにせよ、昆虫少年の成れの果てである私が目指したいのは、多様性への道です。

「３～４億年の昔、魚が進化して両棲類になった。しかし、当時の最も進化した魚がさらに進化して両棲類になったのではなく、魚としては幼稚（primitive）な形態のものが進化して両棲類になった。そして幼稚な形態の両棲類が進化して爬虫類になり、（中略）幼稚な形態の猿が進化して人類になった。数学の進歩のパターンもこれと同様だと思うのです。ある一つの分野が進歩していって、その進歩の最先端から新しい分野が生まれるのではなくて、その分野の原始的（primitive）な所から新しい分野が生まれる。」（小平邦彦［回顧と・・・］）

新しいタイプの生物種が生まれたとしても、それが成功する（長い世代を生き延びる）とは限らない、むしろ、ほとんど必ず失敗するわけです。それが自然の掟であるのなら、私たちも失敗を恐れず、気長にやるしかありません。「成功する」には才能があるに越したことはないでしょうが、絶対に必要とも思いません。

「私がもつ程度の並みの才能でもって、こうして私が幾つかの重要な問題に関して科学者たちの心情に相当な影響を与えてこられたということは実に驚くべきことである。」（ダーウィン「自伝」）

「凡庸な数学者に、良いアイデアが偶然浮かぶこともある。」（A. Weil）

数学世界に生息する「生物種」を増やし、数学世界をにぎやかにする方法は、いろいろ考えられます。たとえば、これまで関係ないと思われてきた数学分野の間の新たな関係を発見することは、多くの場合、新しい研究対象を掘り起こすことにつながり、多様性の増大にも一定の貢献をすることになります。これを仮に「内部的方法」ということにすれば、もうひとつ「境界的方法」とでも呼べそうな方法があります。それは「数学」と「数学でないもの」の境界にあって、まだ数学になりきっていない事象を数学の内部に取り込もうとする方法です。

例えば、「対称性（シンメトリー）」は、芸術と数学の境界上にあって、数学的にも極めて重要な概念であることは古くから知られていました。しかし、群の概念の導入により、シンメトリーが真の意味で数学の内部に取り込まれ、研究対象としての位置を確立したのは 19 世紀になってからのことです。20 世紀数学のの大きなテーマのひとつは、シンメトリー概念の各分野への浸透でした。
また、長い間、数学と非数学の間にある直感的概念と考えられてきた「確率」がコルモゴロフの基礎付けにより、正式な数学概念へと昇格したのは、僅か 70 年ほど前のことに過ぎません。21 世紀は恐らく確率概念の各分野への浸透の世紀になるでしょう。
　私は、もともと、群の表現論を研究分野としてきたのですが、最近になってゲームやアルゴリズムにも、強い興味を持つようになりました。その理由のひとつは、ゲームもアルゴリズムも、まだ数学の概念には成りきっていない、と私には思えたからです。
アルゴリズムといえば、数学的な問題を解くための ステップ 1、ステップ２、・・・と直線状に並んだ手順の列を思い浮かべるのが普通です。しかし、連立一次方程式の解法をみてもわかるように、多くの場合、これらの手順にはいくつもの分岐が存在します。実用上のアルゴリズムにおいては、分岐を人為的に刈り取って、直線状に仕立て上げてあるのですが、数学概念としてのアルゴリズムは分岐をもつほうが自然です。分岐をもつアルゴリズムのことを、（情報科学の用語で）非決定性アルゴリズムといいます。分岐に出会うごとに、どちらの道をいくかを決断して進んでいくのが「１人ゲーム」ですから、非決定性アルゴリズムと１人ゲームは、数学的には同じものであることがわかります。従って、仕事（アルゴリズム）と遊び（ゲーム）に本質的な違いはありません。
１人ゲームの「手」を２人で交互にプレイして、どちらが先にゴールするかを競うと、２人ゲームになります。また、非決定性アルゴリズムの分岐点においてどの道を選ぶかを、たとえばサイコロを振ることによって決めることにすれば、確率アルゴリズムの概念が生まれます。
以上により、（非決定性）アルゴリズム、確率アルゴリズム、（１人または２人）ゲームは並列して研究すべき対象であることがわかります。（確率アルゴリズムの量子力学版として「量子アルゴリズム」という概念がありますが、これを私の研究に取り込むことは、今後の目標のひとつです。）これらを統一的に取り扱うために「抽象アルゴリズム」という代数系を考えました。アルゴリズムと抽象アルゴリズムの関係は、対称性と群の関係に相当します。抽象的な群の概念においては、「〇〇の対称性」の〇〇の部分は捨て去られているのと同様に、抽象アルゴリズムにおいては「〇〇のアルゴリズム」の〇〇の部分が捨て去られています。
ここで重要になるのは数学的に興味深い抽象アルゴリズムの例です。そのような例がないと我々の試みは「内容のない単なる抽象化」ということになってしまうからです。
先ほど、私はもともと群の表現論を主な研究分野としてきた、と書きました。
表現論の中で、最も代表的なのが「対称群の表現論」です。

対称群の表現論では、イギリスの数学者 A. Young（本業は牧師、極めてユニークな人物）の創案（1900 年頃）になるヤング図形・ヤング盤が重要な役割を果たします。一見、子供のおもちゃのようなヤング図形・ヤング盤ですが、まるで「汲めども尽きぬ魔法の泉」のように、いつまでも新しい発想を生み出す不思議な図形で、これらに夢中になっている数学者や物理学者は今でも非常に多いのです。

ヤング図形を勉強すると必ず出会うのが、中山 正先生（元名古屋大学教授、故人）が考え出されたフックという概念です。帽子などを引っ掛けるフックに似ているからということで、こう命名されたようですが、しゃれた名前のせいか、日本人数学者の中にも、日本人が考え出したとは気付かない人も結構いるようです。中山先生は対称群のモジュラー表現における難問を解決するために、ヤング図形からフックを抜いていく、という非決定性アルゴリズム（中山アルゴリズム）を 1940 年頃に考え出されました。

中山先生の研究に触発されて、２人のプレイヤーがヤング図形から交互にフックを抜いていくという２人ゲーム（佐藤のゲーム）を考え、先手と後手のどちらが必勝かを判定する代数的条件を証明されたのが、佐藤幹夫先生（京都大学名誉教授）です。

ヤング図形Ｙの「箱（小正方形)」に、１から n（＝Ｙの箱の個数）までの番号を上から下の方向にも、左から右の方向にも増加するように入れたものを標準ヤング盤といいます。ヤング図形Ｙの標準ヤング盤の総数はｎ！を

$\Pi\ h(v)$　（Ｙの箱ｖをカドとするフックの長さｈ(v)の積）

で割ったものとして計算できます。これをフック公式といい、対称群の既約表現の次元公式と解釈することもできます。不思議なことに、佐藤のゲームの理論においても、このフック公式とそっくりな式が極めて重要な役割を果たしているのです。

また、詳しい説明は省きますが、フック公式には Greene と Nijenhuis と Wilf による確率アルゴリズムを用いた面白い証明があります。（コンピュータ科学者 D.E. Knuth の名著“The Art of Computer Programing Vol.3 ”（第２版、ASCII から邦訳あり）の 5.1 節に、ヤング図形の優れた解説があります。私自身もこの本から大きな影響を受けました。表現論の見地からでは B.E. Sagan の“The Symmetric Group” が標準的です。）

つまり、ヤング図形のフック公式という一点において、非決定性アルゴリズム、２人ゲーム、確率アルゴリズムという「抽象アルゴリズムの３つの顔」がぴったりと重なり合うのです。私たちの研究の出発点として、これ以上のものは望めません。

　ここから先は、現在進行中の私の研究についての話となりますが、このまま、雑談風に話を続けます。

先に私はアルゴリズムやゲームがまだ数学に成りきっていない概念であると主張しました。同じことはヤング図形についてもいえます。この子供じみた図形は対称群の表現論を遥かに超えた広い範囲でその重要性が認識されているにも関わらず、なぜ重要なのか（言い換えれば、なぜ自然な概念なのか）という点は問われないままになっているからです。

ヤング図形をその在るべき位置に据えるためには、より広い枠組みの中でヤング図形を捉えなおすのがよいでしょう。私は中山アルゴリズムが、抽象的アルゴリズムとして、どのように特徴付けられるかを考えることによって、この問題にアプローチしました。中山アルゴリズムを様々な角度から調べた経験を通して、私は「平明アルゴリズム」という一般概念に到達しました。平明アルゴリズムは４つの公理を満たす抽象アルゴリズムとして定義されます。また、平明アルゴリズムは「初期データ」によって一意的に定まる、という著しい性質を持ちます。（微分方程式の解が初期値で決まるという結果に似ています。）平明アルゴリズムの初期データは「ダイアグラム」で表示され、そのダイアグラムには自然に「フック」の概念が定義されます。中山アルゴリズムは平明アルゴリズムの（最も簡単な）例であり、そのダイアグラムはヤング図形と等価です。
平明アルゴリズムは（有限性に関するある仮定のもとで）完全に分類することができます。しかも、そのような平明アルゴリズムを含む良いアルゴリズムの族をコクセター群を用いて構成することができます。とくに、中山アルゴリズム（およびヤング図形）はA型コクセター群、すなわち対称群を用いて自然に構成されます。ただし、この構成と対称群の表現論におけるヤング図形の役割との関係はまだ明らかではありません。


アルゴリズムについて講演中の筆者（2006）

ついでですから、寄り道をして、コクセター群の創始者H.S.M. Coxeter について紹介します。Coxeter は16歳くらいから100歳近くまで、実または複素高次元空間における正多面体（とその類似）という当時も今も全くはやらない分野の研究を続けたという驚くべき人物です。何世紀も前に死滅したはずの「初等幾何学」を20世紀に甦らせた人と言ってもいいでしょう。Coxeterは高次元空間における正多面体の対称性（シンメトリー）を記述するという目的でコクセター群を導入しました。数学世界の辺境から生まれたコクセター群の概念は、今では群論を遥かに越えて様々な数学分野に出現する、

いわば数学世界の共通言語のような存在になっています。

“The belief that all simple (having no continuous moduli) objects in the nature are controlled by the Coxeter groups is a kind of religion.” (V. I. Arnold)

不思議な巡り合わせですが、Coxeter はケンブリッジ大学における A.Young の講義の数少ない受講者のひとりでした。また、中山先生は Coxeter と（多分、生涯にただ一度だけ）1939 年に出会っておられます。

話を元に戻します。

平明なアルゴリズムの研究においても、（必ずしも、有限でない）Coxeter 群の理論を使うことができます。（このような一般論を作ったのは J.Tits です。）

例えば、中山アルゴリズムについての中山-Robinson の定理、佐藤のゲームについての佐藤の定理、Greene-Nijenhuis-Wilf の確率アルゴリズムの基本性質（従って、フック公式も）などは、全て平明なアルゴリズムに拡張されます。最後のもの（確率アルゴリズム）については、私の研究室における修士論文（2003 年 3 月）の結果です。この結果に一般論の光を当てることにより「この公式が成り立つ筈だ」ということで、もとのフック公式より遥かに強力な「色つきのフック公式」が平明なアルゴリズムについて成立するという予想が生まれ、その予想は仲田研登さんによって 2008 年に証明されました。（雑誌「数学セミナー」2008 年 12 月号の山田裕史氏の「組合せ論逍遥」に解説があります。）これらの結果がさらに一般論の研究を推し進め、一般論の研究が特別な場合について新たな課題を提供する、という良いサイクルが出来てきています。考えてみたい問題が次々と出てくるので、研究がなかなか追いつかないという状態です。

おしゃべりをしているうちに、最初の予定からかなりずれて来たようです。（数学の研究を志す若い人へのメッセージ、という予定でした。）そこで、私がいつも勇気付けられていることばをふたつ紹介して、帳尻を合わせることにします。どちらも数学者のことばではありません。

「学問は借り物ではできません。どなたでも独学になるはずです。」 （白川 静）

「いつもポケットにキャラメルを。」 （中学時代の恩師（国語）の船田先生）

数学のどこがおもしろいのか？と一般の方、たとえば親戚の人から、聞かれることがよくあります。余りうまい答えは持ち合わせていないのですが、ひとつの答えとして、次のようには言えると思います。

数学の勉強は、或いは、そんなにおもしろくないかもしれない。

しかし、数学の研究は勉強に比べて、百倍、おもしろい。

サッカーのゴールの練習と、実戦でゴールを決めるくらいの違い、といえばいいでしょうか。ともかく、数学は研究しないと損ですよ。