

論 説

フック構造をもつゲームとアルゴリズム

川 中 宣 明

本稿では進行の途中で複雑に分岐する事象のことをアルゴリズムまたはゲームと呼んでいる。日常生活、自然界、数学、... 分岐は至る所にあり、しかも極めて多様である。そのようなものの一般理論が可能とも思えないが、何らかの意味で典型的なものに限れば、数学として扱えるかもしれない。例えば、カオス的な挙動を示すタイプと可積分系に似て‘解’の追跡が可能なタイプの両極端に数学としての可能性が感じられる。本稿では、後者の初等的な例のひとつとして、筆者が「平明アルゴリズム」と呼ぶクラスを取り上げ、ゲームとしての側面とアルゴリズムとしての側面の両面から考察を試みる。

1 抽象アルゴリズム

この節は後で必要になる一般的な用語・記号などの準備に充てる。具体例については8節以降を参照して頂けると幸いである。 P は集合、 $\varphi: P \rightarrow 2^P$ は P からその部分集合の集合 2^P への写像とする。対 (P, φ) のことを(抽象)アルゴリズムと呼ぶ¹⁾。集合 P を状態空間、写像 φ を分岐写像と呼ぶ。 P の元は点(または状態)と呼び、アルゴリズムの進行途中の状態を表す。 $q \in \varphi(p)$ は q が p の次の点としての選択肢に入っていること、つまりアルゴリズムの次のステップで p という状態から q という状態に移る可能性があることを意味する。多くの実用アルゴリズムにおいては状態 q はその直前状態 p によって一意的に定まっているが、ここでは q が p によって必ずしも一意的に定まっていない状況を考えている²⁾。 $q \in \varphi(p)$ を $p \rightarrow q$ (あるいは $q \leftarrow p$) ともかき、順序対 $p \rightarrow q$ を p を始点とする矢と呼ぶ。 $\varphi(p) = \emptyset$ のとき p には次に移るべき点がない、つまり p はアルゴリズムの停止状態を表していると考え、このような p をアルゴリズムの終点という。現実のアルゴリズムの場合、どのような初期状態を与えても有限ステップ後には停止状態に達することが重要である。そこでアルゴリズム (P, φ) において、任意の $p \in P$ に対し

$$p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_i \rightarrow p_{i+1} \rightarrow \cdots \quad (1)$$

の形の P の点列(以下、 p を始点とする経路と呼ぶ)が必ず有限列であるとき、つまり $\varphi(p_k) = \emptyset$ となる p_k が必ずあるとき、アルゴリズム (P, φ) は有限であるということにする。また任意の $p \in P$ に対し $\varphi(p)$ が有限集合であるとき (P, φ) は有限分岐であるという。矢 $p \rightarrow q$ に対し、 p を始点とし q に至る経路

$$p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_l = q \quad (2)$$

で長さ $l \geq 2$ となるものが存在しないとき、矢 $p \rightarrow q$ は既約であるという。経路(1)に現れる全ての

矢が既約のとき経路 (1) は既約分解されているという. (P, φ) が有限かつ有限分岐の場合, 任意の矢 $p \rightarrow q$ に対し, 既約分解された経路 (2) が存在する. これを矢 $p \rightarrow q$ の既約分解という.

有限アルゴリズムは上述のように, 必ず有限ステップで停止するようなアルゴリズム (のモデル) と考えることができるが, 別の解釈も可能である. 例えば有限アルゴリズム (P, φ) において $\varphi(p) \neq \emptyset$ であるような任意の $p \in P$ に対し集合 $\varphi(p)$ に確率測度を指定しておけば, p の次の状態を選択肢の集合 $\varphi(p)$ の中から与えられた確率測度に従って選んでいき有限ステップ後に停止する, というタイプのアルゴリズムが得られる. これを確率アルゴリズムと呼ぶ. 有限アルゴリズム (P, φ) は次のように 2 人ゲームのモデルと考えることもできる³⁾. 点 $p \in P$ はゲームの局面を表すと考え, 局面 $p \in P$ の次の局面としてルール上, 許される局面全体の集合を $\varphi(p)$ とする. 2 人のプレイヤーの一方が先手, 他方が後手となり, 前もって指定しておいた局面 (始局面) p_0 から出発して, まず先手が $p_1 \in \varphi(p_0)$ を選び, 後手が $p_2 \in \varphi(p_1)$ を選び, ... と 2 人のプレイヤーが交互に局面を選んでいくと, (P, φ) の有限性により, どちらかが終点 (終局面) p_n を選んでゲームが終了する. そのとき次の手番のプレイヤー (n が偶数なら先手, 奇数なら後手) を敗者と呼び, 他方を勝者と呼ぶ.

簡単な記号を用意しておく. $\varphi: P \rightarrow 2^P$ が与えられたとき $p \in P$ に対し

$$\varphi^{-1}(p) = \{q \in P \mid q \rightarrow p\}, \quad \varphi^{\pm 1}(p) = \varphi(p) \cup \varphi^{-1}(p),$$

$$\varphi^0(p) = \{p\}, \quad \varphi^k(p) = \varphi(\varphi^{k-1}(p)) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくことで P から 2^P への写像 φ^k ($k = -1, 0, 1, 2, \dots$) および $\varphi^{\pm 1}$ を定義する. 例えばアルゴリズム (P, φ^{-1}) は, アルゴリズム (P, φ) において全ての矢の向きを逆にしたものである.

(P, φ) がアルゴリズムであるとき P の任意の部分集合 Q に対し $\varphi_Q: Q \rightarrow 2^Q$ を

$$\varphi_Q(q) = \varphi(q) \cap Q$$

によって定義すれば (Q, φ_Q) はアルゴリズムとなる. (Q, φ_Q) を (あるいは単に Q を) (P, φ) の部分アルゴリズムという. このように状態空間 P の部分集合 Q は自動的に部分アルゴリズムの状態空間とみなされる. とくに Q が φ について閉じているとき, 即ち $\varphi(q) \subset Q$ が任意の $q \in Q$ に対して成り立っているとき Q は充満部分アルゴリズムであるという. $p \in P$ を含むような最小の充満部分アルゴリズムを $\langle p \rangle_\varphi$ とかく. 集合としては

$$\langle p \rangle_\varphi = \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi^k(p)$$

である. この形のアルゴリズムを単項アルゴリズムと呼び, p をその始点という. 2 つのアルゴリズム $(P, \varphi), (Q, \psi)$ に対し, 状態空間が集合としての非交和 $P \sqcup Q$ であるようなアルゴリズムで, P と Q をともにその充満部分アルゴリズムとして含むものが唯 1 つ存在する. これをアルゴリズム (P, φ) と (Q, ψ) の非交和 $(P, \varphi) \sqcup (Q, \psi)$ という. 2 つ以上のアルゴリズムの非交和も同様に定義される. 空でないアルゴリズム (P, φ) はいくつかの空でない充満部分アルゴリズムの非交和に一意的に分解される. そのときの分解成分を (P, φ) の連結成分といい, 連結成分が 1 個のとき (P, φ) は連結であるという. (P, φ) と (P, φ') が (状態空間 P を共有する) 2 つのアルゴリズムで, 任意の $p \in P$ に対し $\varphi'(p) \subset$

$\varphi(p)$ が成り立っているとき (P, φ') は (P, φ) の制限アルゴリズムであるという. 2つのアルゴリズム (P, φ) と (Q, ψ) が同型であるとは $f(\varphi(p)) = \psi(f(p))$ となるような1対1かつ上への写像 $f: P \rightarrow Q$ が存在することである. このとき, $(P, \varphi) \cong (Q, \psi)$ とかき, 写像 f をアルゴリズムの同型写像という. 2つのアルゴリズム (P, φ) と (Q, ψ) の和 $(P, \varphi) + (Q, \psi) = (P + Q, \varphi + \psi)$ とは状態空間が

$$P + Q = \{(p, q) \mid p \in P, q \in Q\}$$

で定義され, 分岐写像が

$$(\varphi + \psi)(p, q) = \{(p', q) \mid p' \in \varphi(p)\} \cup \{(p, q') \mid q' \in \psi(q)\}, \quad (p, q) \in P + Q$$

で定義されるアルゴリズムのことである⁴⁾. つまり, このアルゴリズムの点 (p, q) から1ステップ進むことは p, q のどちらか一方を選んでそちらだけ1ステップ進み, 他方は元のまま残すことと同じである. (P, φ) と (Q, ψ) がともに連結なら, それらの和 $(P + Q, \varphi + \psi)$ も連結である. 2つ以上のアルゴリズムの和も同様に定義される.

2 平明アルゴリズム, ダイアグラム, フック

1節で述べたアルゴリズムの定義はあまりにも一般的すぎるので, その中からとくに興味深いクラスを取り出す必要がある. そのようなクラスの選び方は, もちろん一通りではないだろう. 本稿では筆者が平明アルゴリズムと呼ぶクラス(とそれから派生するアルゴリズム)に注意を集中する. この節では平明アルゴリズムの定義を公理系の形で述べ, その最も基本的な諸性質, とくにフック構造, について説明する. 具体例については8節を見て頂きたい.

アルゴリズム (C_0, ω_0) および (C_1, ω_1) を $C_0 = \{0\}$, $\omega_0(0) = \emptyset$ および $C_1 = \{0, 1\}$, $\omega_1(0) = \{1\}$, $\omega_1(1) = \emptyset$ で定義する. $n \geq 2$ のとき, アルゴリズム (C_n, ω_n) を

$$(C_n, \omega_n) = (C_1, \omega_1) + (C_1, \omega_1) + \cdots + (C_1, \omega_1) \quad (n \text{ 個の和})$$

で定義する. (C_n, ω_n) ($n \geq 0$) に同型なアルゴリズムを n 次元(超)立方体と呼び, とくに2次元立方体のことを正方形という. n 次元立方体 (C, ω) には $\omega^{-1}(o) = \emptyset$ であるような点 o と $\omega(e) = \emptyset$ となるような点 e がどちらも唯1つ存在する. このような o を C の始点, e を C の終点と呼び, $\omega(o)$ を C の基底という. (P, φ) をアルゴリズムとし $\beta \subset P$ とする. 任意の $a, b \in \beta$ に対して, $b \notin \varphi^{\pm 1}(a)$ であるとき β は独立であるという. 以下の4つの公理 (P1)–(P4) を満たすアルゴリズム (P, φ) を平明アルゴリズムという.

(P1) $p \in P$ とし $\beta \subset \varphi(p)$ とする. β が独立で元の個数が n なら, p を始点とし β を基底とする n 次元立方体が P の部分アルゴリズムとして唯1つ存在する.

(P2) $p, q, s \in P$, $q \in \varphi(p)$, $s \in \varphi(q)$, $s \notin \varphi(p)$ とする. このとき $\{p, q, r, s\}$ が正方形であるような $r \in P$ が唯一つ存在する.

(P3) $p, s_1, s_2 \in P$, $q, r_1, r_2 \in \varphi(p)$ とし $\{p, q, r_1, s_1\}$, $\{p, q, r_2, s_2\}$ は共に正方形とする. このとき $r_2 \in \varphi(r_1) \iff s_2 \in \varphi(s_1)$ である.

(P4) $p, s \in P$, $q, r, t \in \varphi(p)$, $t \neq q, r$ とし $\{p, q, r, s\}$ は正方形とする. このとき $s \in \varphi^{\pm 1}(t) \iff q, r \in \varphi^{\pm 1}(t)$ である.

公理 (P1)–(P4) はいずれも P の任意の点 p の ‘近く’ だけに関する条件、つまり局所的性質である。これらの条件からアルゴリズム (P, φ) についての全域的性質（後の定理 3, 4, 5, 6, 9 など）が導かれることを報告することが本稿の目的である⁵⁾。公理の内容について簡単に説明しておく。(P1) は平明アルゴリズムが、いろいろな n についての n 次元立方体の張り合わせであること（図 1）を、(P2) はある点 p から 1 つの矢では到達できないが、2 つの矢の連鎖でなら到達できる点 s は p を始点とする正方形の終点であること（図 2）を、(P3) は始点とそこから出る 1 つの矢を共有する 2 つの正方形の関係（図 3）を、(P4) は始点を共有する矢と正方形の関係（図 4; 線分は向きの指定がない矢を表す）を

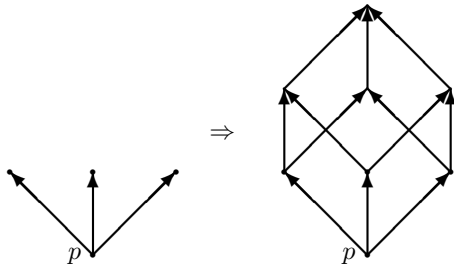


図 1 : 公理 (P1) ($n = 3$ のとき)

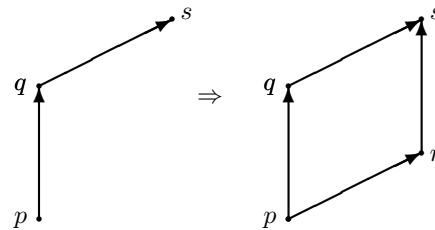


図 2 : 公理 (P2)

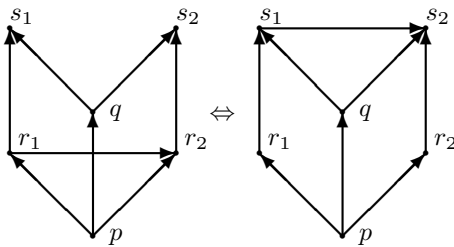


図 3 : 公理 (P3)

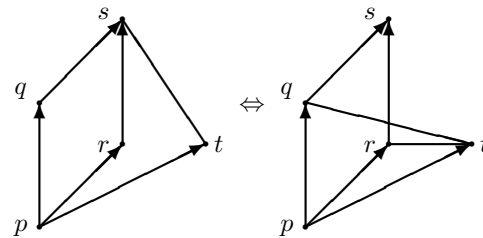


図 4 : 公理 (P4)

述べている。公理 (P1)–(P4) から分かるように、平明アルゴリズムにおける分岐は簡単なタイプのものばかりである。明らかに n 次元立方体は平明である。また、2 つの平明アルゴリズムの和は平明である。平明アルゴリズムにおける基本的な諸結果を述べておく。

命題 1 (P, φ) は平明アルゴリズムとする。任意の $p \in P$ に対し $p \notin \varphi^k(p)$ ($k \geq 1$) である。

命題 2 連結な平明アルゴリズムの終点は存在すれば唯 1 つである。とくに (P, φ) が（連結とは限らない）平明アルゴリズムのとき、任意の $p \in P$ に対し $\langle p \rangle_\varphi$ の終点は存在すれば唯 1 つである。

命題 3 (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムとする。 k を正の整数とすると、任意の $p \in P$ に対し

$$\varphi^k(p) = \emptyset \iff k \geq |\varphi(p)| + 1$$

が成り立つ。ただし、有限集合 S に対し $|S|$ は S の元の個数を表す。とくに、有限分岐な平明アルゴリズムは有限である⁶⁾。

平明アルゴリズムの充満部分アルゴリズム、とくに単項部分アルゴリズムは平明である。しかし、一般の平明アルゴリズムには、充満とは限らない平明部分アルゴリズムも豊富に含まれている。次の定理はその種の主張のうち最初に述べるべきものである。

定理 1 (P, φ) は平明アルゴリズムとする. 任意の $p \in P$ に対し, 部分アルゴリズム $\varphi^{\pm 1}(p)$ および $\varphi(p)$ はどちらも平明である. また, e が P の終点のとき $\varphi^{-1}(e)$ は平明である.

次の定理は ‘平明アルゴリズムの基本定理’ といってもよい.

定理 2 (P, φ) は平明アルゴリズムとする. 任意の $p \in P$ に対し $Y_p = \varphi(p)$ とおく. 単項アルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ の同型類はその部分アルゴリズム Y_p の同型類によって一意的に定まる.

定理 2 の部分アルゴリズム Y_p は定理 1 により平明である. 平明アルゴリズム Y_p を単項平明アルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラムと呼ぶ. 一般に, ある単項平明アルゴリズムのダイアグラムに同型であるようなアルゴリズムのことを平明ダイアグラム (あるいは単にダイアグラム) という. 写像 $H_p = H_{p, \varphi}: Y_p \rightarrow 2^{Y_p}$ を

$$H_p(x) = \{x\} \cup \varphi_{Y_p}^{-1}(x) = \{x\} \cup (\varphi(p) \cap \varphi^{-1}(x)), \quad x \in Y_p \quad (3)$$

で定義する. H_p を p におけるフック写像, $H_p(x)$ を p における $x \in Y_p$ のフック, $|H_p(x)|$ をフック $H_p(x)$ の長さと呼ぶ. 8 節で説明するように, ヤング図形とそのフック (図 5) は平明アルゴリズムとそのフックの例と考えることができる. 点 p から 1 つの矢で到達できる点の全体が集合としての Y_p である. 集合 Y_p にフック写像 H_p を付け加えると平明ダイアグラム (Y_p, φ_{Y_p}) と同値な概念になる. 定理 2 は p を始点とする平明な単項アルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ の全情報が, それより ‘ずっと小さい’ 集合 Y_p とそのフック写像から原理的に読み取れる⁷⁾ ということを主張している. 本稿の以下の部分で述べる幾つかの主要な結果 (定理 3, 4, 5, 6, 9) はこの ‘原理’ の具体的現れと考えられる. 後で何度かこのことに注意を喚起する機会がある.

上の記号の下で $p \rightarrow q$, 即ち $q \in Y_p$ とする. このとき, $\langle q \rangle_\varphi$ のダイアグラム Y_q は $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラム Y_p からフック $H_p(q)$ を ‘引く’ ことで得られる. 詳細は略すが, とくに矢 $p \rightarrow q$ が既約であることの必要十分条件は $H_p(q) = \{q\}$ であり, このときアルゴリズムとしての自然な同型 $Y_q \cong Y_p \setminus \{q\}$ がある. このことから p を始点とする既約分解された経路は $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラム Y_p から次々と長さ 1 のフックを引いていく過程と正確に対応していることがわかる.

3 Dynkin 図形, (G, K) 商

この節から 7 節まで平明アルゴリズムのいろいろな側面を順次取り上げていく. 一般論の形で述べるが, 具体例については 8 節以降にまとめて書くので, 適宜, そちらも参照して頂けると幸いである.

(P, φ) は連結かつ有限分岐な平明アルゴリズムとする⁸⁾. 命題 3 と命題 2 により P には終点 e が唯 1 つ存在する. 定理 1 によりアルゴリズム $\varphi^{-1}(e)$ は平明であるから, その各連結成分 P_{i_1} ($i_1 \in I$) には終点 e_{i_1} が唯 1 つ存在する. 定理 1 によりアルゴリズム $P_{i_1} \cap \varphi^{-1}(e_{i_1})$ ($i_1 \in I$) は平明であるから, その各連結成分 $P_{i_1 i_2}$ ($i_2 \in I_{i_1}$) には終点 $e_{i_1 i_2}$ が唯 1 つ存在する. 以下, 同様の操作を可能な限り (場合によっては無限回) 繰り返して連結かつ平明な部分アルゴリズム

$$P_{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad (i_1, i_2, \dots, i_k) \in I \times I_{i_1} \times \dots \times I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}, \quad k \geq 1$$

とその終点 $e_{i_1 i_2 \dots i_k}$ を考える. このとき $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} = (e_{i_1 i_2 \dots i_k} \rightarrow e_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}})$ (ただし, $k = 1$ のとき $e_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} = e$) は既約な矢である. $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($k \geq 1$) を頂点とし, $\{\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}, \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}\}$ ($k \geq 2$) を辺とするグラフ⁹⁾ $D(P) = D(P, \varphi)$ を考え, $D(P)$ に新たな頂点 α_* と辺 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_*\}$ ($i_1 \in I$) を付け

加えてできるグラフを $D(P)_* = D(P, \varphi)_*$ とする. ただし矢の向きが $D(P)_*$ から読み取れるようにするために頂点 α_* は白丸, 他の頂点は黒丸で表すことにする. $D(P)_*$ を (P, φ) の Dynkin 図形と呼ぶ¹⁰⁾. 具体例は図 8 にある. Dynkin 図形はアルゴリズムの同型類を決めるわけではなく, 同型よりもっと緩い分類の指標になっている. P が非連結で有限分岐な平明アルゴリズムのとき, その Dynkin 図形 $D(P)_*$ は P の連結成分の Dynkin 図形の非交和として定義する. $D(P)$ についても同様である. 上と同様に, ただし $e_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ ($k \geq 1$) を頂点とし, 矢 $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ を (向きを無視して) 辺とするグラフ $E(P) = E(P, \varphi)$ を考えれば自然に $D(P)_*$ と同型になる.

命題 4 (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムとし $p \in P$ とする. グラフ $E(Y_p)$ に新たな頂点 $*$ と新しい辺 $\{e_{Y_p, j}, *\}$ ($j \in J$) (ただし, $e_{Y_p, j}$ ($j \in J$) は Y_p の終点) を付け加えたものを $E(Y_p)_*$ とする. このとき 2 つのグラフ $D(\langle p \rangle \varphi)_*$ と $E(Y_p)_*$ の間には頂点 α_* が頂点 $*$ に対応するような自然な同型対応がある.

$D(P), D(P)_*$ の頂点全体の集合をそれぞれ $\Pi(P) = \Pi(P, \varphi), \Pi(P)_* = \Pi(P, \varphi)_*$ とする. $\Pi(P) = \Pi(P)_* \setminus \{\alpha_*\}$ である. $\Pi(P)$ の元の形式的非負整数結合全体を $\mathbb{Z}^+ \Pi(P)$, (P, φ) の矢全体を $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P, \varphi)$ とすると, 自然な包含写像 $i: \Pi(P) \hookrightarrow \mathbb{Z}^+ \Pi(P)$ と $j: \Pi(P) \hookrightarrow \mathcal{A}(P)$ が考えられる.

命題 5 (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムとする. 次の (a), (b), (c) を満たす写像 $F: \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \Pi(P)$ が一意的に存在し, $(p \rightarrow q) \in \mathcal{A}(P)$ が既約なら $F(p \rightarrow q) \in \Pi(P)$ である.

(a) $i = F \circ j$;

(b) $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (p \rightarrow r) \in \mathcal{A}(P)$ のとき

$$F(p \rightarrow r) = F(p \rightarrow q) + F(q \rightarrow r);$$

(c) $\{p, q, r, s\}$ が p を始点, s を終点とする (P, φ) の正方形のとき

$$F(p \rightarrow q) = F(r \rightarrow s), \quad F(p \rightarrow r) = F(q \rightarrow s).$$

命題 5 は矢の既約分解における Jordan-Hölder 型の結果である. 写像 F により (P, φ) の既約な矢に対して $\Pi(P)$ の元, ルート系のことばを使えば ‘単純ルート’ が対応する. また, 命題 5 からは明らかではないが, 一般の (必ずしも既約でない) 矢には ‘正のルート’ が対応することも証明される. 7 節で経路に関する和を考えるとき, 矢 $p \rightarrow q$ に対する ‘重み’ として $F(p \rightarrow q)$ を使うことになる.

写像 F の別の応用を与えるのが次の命題である.

命題 6 G は任意の可換半群とする. 任意の写像 $h: \Pi(P) \rightarrow G$ に対し, $\tilde{h}: \mathbb{Z}^+ \Pi(P) \rightarrow G$ をその半群準同型写像への拡張とする. さらに $F: \mathcal{A}(P) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \Pi(P)$ を命題 5 の写像とし, $f: \mathcal{A}(P) \rightarrow G$ を $f = \tilde{h} \circ F$ で定義する. G の任意の部分半群 K に対し $\mathcal{A}_K(P) = \mathcal{A}_K(P, \varphi) = f^{-1}(K) \cap \mathcal{A}(P, \varphi)$ とおき, 写像 $\varphi_{(G, K)}: P \rightarrow 2^P$ を

$$\varphi_{(G, K)}(p) = \{q \in \varphi(p) \mid (p \rightarrow q) \in \mathcal{A}_K(P, \varphi)\}$$

で定義する. このとき (P, φ) の制限アルゴリズム $(P, \varphi_{(G, K)})$ は有限分岐な平明アルゴリズムである. とくに, 任意の $p \in P$ に対し $\langle p \rangle_{\varphi_{(G, K)}}$ は唯 1 つの終点をもつ.

命題 6 の平明アルゴリズム $(P, \varphi_{(G, K)})$ と元の平明アルゴリズム (P, φ) のどちらで考えるかによって, 同一の $p \in P$ について 2 種類のダイアグラム $\varphi_{(G, K)}(p)$ と $\varphi(p) = Y_p$ が得られるが, 前者を後者

の (G, K, h) 商 (または, 略して (G, K) 商) と呼ぶ. さらに, $\langle p \rangle_{\varphi(G, K)}$ の終点を p の (G, K, h) コア (または, 略して (G, K) コア) と呼ぶ. とくに $G = \langle g \rangle$ が位数 n の巡回群, h が

$$h(p \rightarrow q) = g, \quad (p \rightarrow q) \in \Pi(P, \varphi)$$

で定義される写像, K が G の自明な部分群であるとき, 命題 6 の写像 $\varphi_{(G, K)}$ のことを φ_n とかくこともある. 写像 $\varphi_n: P \rightarrow 2^P$ の定義は

$$\varphi_n(p) = \{q \in \varphi(p) \mid \text{矢}(p \rightarrow q) \text{ の既約分解中の既約矢の個数が } n \text{ の倍数}\}, \quad p \in P \quad (4)$$

と同値である. (P, φ_n) におけるダイアグラム $\varphi_n(p)$ をとくに元のダイアグラム $\varphi(p)$ の n 商, $\langle p \rangle_{\varphi_n}$ の終点を p の n コアという. これらの概念はヤング図形の n 商, n コア (8 節参照) の拡張になっている. G が巡回群でない場合の (G, K) 商は 4 節で 2 人ゲームとしての平明アルゴリズムの分析に用いられる.

4 2 人ゲームとしての平明アルゴリズム

この節の具体例は 9 節にある. 3 節で導入した n 商を用いて n 進展開を考えよう. n を 2 以上の自然数, (P, φ) を有限分岐な平明アルゴリズムとする. P から $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ への写像 $E_\varphi^{(n)}$ を

$$E_\varphi^{(n)}(p) = \sum_{i=0}^{\infty} n^i \varepsilon_{\varphi, i}^{(n)}(p), \quad p \in P \quad (5)$$

で定義する. ただし, $\varepsilon_{\varphi, i}^{(n)}(p)$ は自然数の n 進展開における n^i の係数に相当し, (4) を用いて

$$\varepsilon_{\varphi, i}^{(n)}(p) \equiv |\varphi_{n^i}(p)| \pmod{n}, \quad 0 \leq \varepsilon_{\varphi, i}^{(n)}(p) < n, \quad p \in P, i = 0, 1, 2, \dots$$

によって定義する. $E_\varphi^{(n)}$ を (P, φ) の n 進展開関数という. 非負整数 a の n 進展開は当然 a に等しく, 従って n によらないが, $p \in P$ の n 進展開は, 一般には n に依存する非負整数になる. 一般の n については $E_\varphi^{(n)}$ の性質は僅かしか分かっていない. しかし, 以下の定理 3 と定理 4 で述べるように, 2 人ゲームとしての (P, φ) についての決定的な情報が 2 進展開関数 $E_\varphi^{(2)}$ から得られる.

定理 3 (P, φ) を有限分岐な平明アルゴリズムとし, $E_\varphi^{(2)}: P \rightarrow \mathbb{N}$ を (P, φ) の 2 進展開関数とする. $p \in P$ とするとき, 次が成り立つ.

(i) $0 \leq k < E_\varphi^{(2)}(p)$ を満たす任意の整数 k に対し, $E_\varphi^{(2)}(q) = k$ となる $q \in \varphi(p)$ が存在する;

(ii) 任意の $p' \in \varphi(p)$ に対し, $E_\varphi^{(2)}(p) \neq E_\varphi^{(2)}(p')$.

(iii) とくに $p \in P$ を始局面とする 2 人ゲームを考えるとき, 後手側に必勝手順が存在するための必要十分条件は $E_\varphi^{(2)}(p) = 0$ である¹¹⁾. それ以外の場合には先手側に必勝手順が存在する.

定理 3(i)(ii) は $E_\varphi^{(2)}(p)$ が局面 p の Sprague-Grundy 数¹²⁾ に他ならないことを意味している. ただし, Sprague-Grundy 理論と関係の深い Nim 和¹³⁾ の概念は, 定理 3 あるいはすぐ後に出てくる定理 4 を述べる際にも, その証明にも表立って必要になることはない. 定理 3 だけだと実際に必勝手順を探すには, かなりの計算を伴う試行錯誤が必要であるように見える¹⁴⁾ が, 実は試行錯誤を必要としない方法が存在し, 計算量も大幅に減らすことができる. それについて述べる準備の中で (G, K) 商の概念が必要になる. G として巡回群でない最も簡単な可換群, すなわち Klein の 4 元群をとる. 記

号を確定させるために $G = \langle a, b \rangle$ とし $a^2 = b^2 = 1, ab = ba$ を G の基本関係式とする. Dynkin 図形 $D(P, \varphi)_*$ は樹状グラフなので, その任意の 2 頂点 v, w 間の距離 $d(v, w)$ を v と w の間にある辺の本数として定義できる. これを用いて任意の $\alpha \in \Pi(P, \varphi)$ に対し

$$h(\alpha) = \begin{cases} a & (d(\alpha, \alpha_*) \text{ が奇数のとき}); \\ b & (d(\alpha, \alpha_*) \text{ が偶数のとき}). \end{cases} \quad (6)$$

とおくことによって, 写像 $h: \Pi(P, \varphi) \rightarrow G$ を定義する. G の自明でない真部分群は 3 個あり, それらは巡回部分群 $\langle a \rangle, \langle b \rangle$ および $\langle ab \rangle$ である. 前節で定義したように, それぞれに対応して有限分岐な平明アルゴリズムを $(P, \varphi_{(G, \langle a \rangle)})$, $(P, \varphi_{(G, \langle b \rangle)})$ および $(P, \varphi_{(G, \langle ab \rangle)})$ の 3 通り考えることができ, 従って n 進 (とくに 2 進) 展開関数も $E_{\varphi_{(G, \langle a \rangle)}}^{(n)}$, $E_{\varphi_{(G, \langle b \rangle)}}^{(n)}$ および $E_{\varphi_{(G, \langle ab \rangle)}}^{(n)}$ の 3 通り考えることができる¹⁵⁾. 次の定理が 2 人ゲーム (P, φ) において, 必勝側のプレイヤーが勝つためにプレイすべき手を探すための良い方法を与える. (説明の都合で定理 4 が定理 3 の後になったが, 実際には下の定理 4 を先に証明し, それを用いて上の定理 3 を証明する.)

定理 4 (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムとする. (6) により $h: \Pi(P, \varphi) \rightarrow G$ を定義し, それを用いて P から 2^P への 3 つの写像 $\varphi_{(G, \langle a \rangle)}, \varphi_{(G, \langle b \rangle)}$ および $\varphi_{(G, \langle ab \rangle)}$ を定義する.

(i) $p \in P$ に対し

$$E_{\varphi_{(G, \langle ab \rangle)}}^{(2)}(p) = E_{\varphi_{(G, \langle b \rangle)}}^{(2)}(p) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \varepsilon_{\varphi, i+1}^{(2)}(p),$$

および

$$E_{\varphi_{(G, \langle a \rangle)}}^{(2)}(p) = \varepsilon_{\varphi, 0}^{(2)}(p) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \varepsilon_{\varphi, i+1}^{(2)}(p)$$

が成り立つ.

(ii) $p \in P$ と非負整数 t に対し

$$A(\varphi; p; t) = \{q \in \varphi(p) \mid E_{\varphi}^{(2)}(q) = t\}$$

とおく. $t = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i t_i$ ($t_i = 0, 1$) を t の 2 進展開とすると, 次のことが成り立つ.

$$A(\varphi; p; t) = \begin{cases} A(\varphi_{(G, \langle ab \rangle)}; p; (t - t_0)/2) & (\varepsilon_{\varphi, 0}^{(2)}(p) = t_0 \text{ のとき}); \\ A(\varphi_{(G, \langle a \rangle)}; p; (t - 2t_1 + t_0)/2) & (\varepsilon_{\varphi, 0}^{(2)}(p) \neq t_0, \varepsilon_{\varphi, 1}^{(2)}(p) = t_1 \text{ のとき}); \\ A(\varphi_{(G, \langle b \rangle)}; p; (t - t_0)/2) & (\varepsilon_{\varphi, 0}^{(2)}(p) \neq t_0, \varepsilon_{\varphi, 1}^{(2)}(p) \neq t_1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

定理 4(ii) は $p \in P$ が与えられたとき (P, φ) の 2 進展開関数 $E_{\varphi}^{(2)}$ が $\varphi(p)$ 上でとる値についての問題は (P, φ) の 3 種の制限アルゴリズム $(P, \varphi_{(G, \langle a \rangle)})$, $(P, \varphi_{(G, \langle b \rangle)})$ および $(P, \varphi_{(G, \langle ab \rangle)})$ の 2 進展開関数における類似の問題に帰着されるということを主張している. このプロセスは繰り返すことができ, 何回かの繰り返しで自明な問題に帰着される. とくに注釈 11) により, 定理 4(ii) で $t = 0$ としてこの方法を適用すれば, 2 人ゲーム (P, φ) の必勝手順が自動的に見つかる. 実例は 9 節にある.

一般の (ある程度複雑な) 有限アルゴリズムを 2 人ゲームとみた場合, 先手と後手のどちらかに必

勝手順が存在することまでは数学的帰納法ですぐに証明できるが、実際にどちらの側に必勝手順があるかを判定したり、さらには具体的な必勝手順そのものを求めようとすると、ゲームの展開におけるすべての可能性を考慮に入れなくてはならず、すぐに計算量の問題が生じてコンピュータを用いてもどうにもならなくなる。ところがこの節で考えたゲームの場合、これらの目的が定理 3 と定理 4 という計算量が非常に少ない方法で達成できる。この事実は定理 2 に関連して述べた‘原理’のひとつの現れである。平明アルゴリズムを 2 人ゲームと考えたものは、完全な解析が可能という意味で、完全可解ゲームと呼んでよいであろう。茅田智幸の‘高さ k の Sato-Welter ゲーム’についての最近の研究 [10] からわかるように、完全可解ゲームの世界の探索にはまだまだ残された課題がある。

5 確率アルゴリズムと Peterson のフック公式

この節では岡村修志 [15] の結果を平明アルゴリズムの用語を用いて紹介する。 (P, φ) を有限分岐な平明アルゴリズムとする。写像 $\varphi_{\text{irred}}: P \rightarrow 2^P$ を

$$\varphi_{\text{irred}}(p) = \{q \in \varphi(p) \mid \text{矢 } p \rightarrow q \text{ が既約}\}, \quad p \in P$$

によって定義する。命題 3 により (P, φ) は有限だから、アルゴリズム $(P, \varphi_{\text{irred}})$ も有限である。また (P, φ) の終点と $(P, \varphi_{\text{irred}})$ の終点は一致する。終点でない $p \in P$ に対し $\varphi_{\text{irred}}(p)$ に次のようにして確率測度を定義する。集合 $Y_p = \varphi(p) \neq \emptyset$ に新しい点 $*$ (命題 4 参照) を付加して得られる状態空間 $Y_p^* = \{*\} \sqcup \varphi(p)$ と

$$K_p(*) = \varphi(p), \quad K_p(x) = \varphi(p) \cap \varphi^{-1}(x) = H_p(x) \setminus \{x\}, \quad x \in \varphi(p)$$

で定義される分岐写像 $K_p: Y_p^* \rightarrow 2^{Y_p^*}$ からなるアルゴリズム (Y_p^*, K_p) において $*$ を始点とする経路

$$* = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \rightarrow \cdots$$

を考える。ただし、任意の $m \geq 0$ に対し x_m が (Y_p^*, K_p) の終点でない場合には経路の次の点 x_{m+1} を候補の集合 $K_p(x_m)$ の中から等確率 (すなわち確率 $1/|K_p(x_m)|$) で選んで経路を延長していくのである。これは 1 節の意味での確率アルゴリズムである。有限ステップ後に (Y_p^*, K_p) のある終点を選ばれて、このアルゴリズムは終了する。実は (Y_p^*, K_p) の終点全体の集合と $\varphi_{\text{irred}}(p)$ は一致するので、上に示したプロセスは $\varphi_{\text{irred}}(p) \neq \emptyset$ であるような任意の $p \in P$ に対し $\varphi_{\text{irred}}(p)$ 上の確率測度を定めていることになる。よって任意の $p \in P$ が与えられたとき、確率アルゴリズム $(P, \varphi_{\text{irred}})$ により、 p を始点とする $(P, \varphi_{\text{irred}})$ の 1 つの経路

$$p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_l \rightarrow \cdots \rightarrow p_k = e \quad (\text{ただし } e \text{ は } (P, \varphi) \text{ のある終点}) \quad (7)$$

がある確率で選ばれる。命題 3 により経路 (7) の長さ k は $|\varphi(p)|$ に等しい。

定理 5 (岡村 [15]) (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムとする。上の確率アルゴリズムで経路 (7) が選ばれる確率は、最初に与える始点 p のみで決まり、その値は

$$\frac{\prod_{x \in Y_p} |H_p(x)|}{|Y_p|!} \quad (8)$$

に等しい。

$p \in P$ が与えられたとき, (7) の形の $(P, \varphi_{\text{irred}})$ の経路全体の集合を考えると, この集合のどれかの元が選ばれる確率は 1 であるから, 定理 5 より次の結果が従う。

定理 6 (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムとする. $p \in P$ が与えられたとき $(P, \varphi_{\text{irred}})$ の (7) の形の経路の個数は

$$\frac{|Y_p|!}{\prod_{x \in Y_p} |H_p(x)|} \quad (9)$$

に等しい。

定理 6 は J. B. Carrell の論文 [1] に D. Peterson の結果として証明なしで紹介されている Weyl 群の minuscule 元¹⁶⁾ の最短表示の個数を与えるフック公式に同値である. この公式の書かれた証明としては岡村の修士論文 [15] が最初であった. 岡村 [15] には定理 5 と定理 6 は R. A. Proctor [16][17] が minuscule 元の最短表示の組合せの特徴づけのために導入した d-complete poset の概念を用いて述べられている. この節の結果のその後の発展について 7 節で述べる。

確率アルゴリズムについてこの節で述べた結果が非常に特殊なものなのか, それとも ‘冰山の一角’ なのか, それは分からない。

6 単項平明アルゴリズムの分類, Coxeter 群の元による実現

2 節の定理 2 により, 単項な平明アルゴリズムの分類は平明ダイアグラムの分類に帰着される. 平明ダイアグラムは非常に特別な平明アルゴリズムなので, これにより分類問題は本質的に簡易化される. さて, 平明ダイアグラムの中で基本となるのは単項平明ダイアグラム (= 単項アルゴリズムであるような平明ダイアグラム) である. 再び, 定理 2 により, 単項平明ダイアグラムの分類は基礎平明ダイアグラム (= 単項平明ダイアグラムのダイアグラム) の分類に帰着される. 基礎平明ダイアグラムは平明ダイアグラムの中でも, かなり特別のものなので, 分類問題はさらに簡易化される. このプロセスは何回でも繰り返せるが, もとの単項平明アルゴリズムが有限分岐であるという仮定の下では何回か繰り返すと必ず (\emptyset, \emptyset) (= 空なアルゴリズム) に到達してしまう. これを逆転させ, 下の命題 7 に注意すると空なアルゴリズムから出発して全ての有限分岐な単項平明アルゴリズムを構成・分類することができる。

命題 7 (Y, μ) はダイアグラムとし, (Z, ν) は基礎ダイアグラムとする. 次が成り立つ。

(i) $x, y_1, y_2, y_3 \in Y$ とし, 任意の $1 \leq i, j \leq 3$ に対して $y_i \notin \mu(y_j)$, $y_i \in \mu^{\pm 1}(x)$ かつ $y_i \neq y_j$ ($i \neq j$) とする. このとき $\{x, y_1, y_2, v\}$ が正方形になるような $v \in Y$ は存在しない. とくにダイアグラムは 3 次元立方体を含まない。

(ii) $v, y_1, y_2 \in Y$ が $v \in \mu(y_1) \cap \mu(y_2)$ を満たすとする. このとき $\{x, y_1, y_2, v\}$ が正方形であるような $x \in Y$ は存在すれば唯 1 つである。

(iii) $z_1, z_2, z_3 \in Z$ とし $z_i \neq z_j$ ($i \neq j$) とする. $\{z_1, z_2, z_3\}$ は独立ではない。

有限分岐な単項平明アルゴリズムの分類と実現について述べるには Coxeter 群の用語 (例えば [5] 参照) を使うのが便利である. 以下, Dynkin 図形 D_* を固定し, 有限分岐な単項平明アルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ の Dynkin 図形が D_* であるとする. D_* の頂点集合 Π_* で形式的に張られる実ベクトル空間 V

を考え $\alpha, \beta \in \Pi_*$ に対し

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \text{ のとき;} \\ -1/2 & \alpha \text{ と } \beta \text{ が } D_* \text{ 内で辺で結ばれているとき;} \\ 0 & \alpha \text{ と } \beta \text{ が } D_* \text{ 内で辺で結ばれていないとき;} \end{cases} \quad (10)$$

とすることによって V に内積を定義する. さらに $\alpha \in \Pi = \Pi_* \setminus \{\alpha_*\}$ に対し $s_\alpha \in GL(V)$ を

$$s_\alpha v = v - 2(\alpha, v)\alpha, \quad v \in V$$

で定義する. $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ で生成される $GL(V)$ の部分群 $W = \langle S \rangle$ は Coxeter 群である. $\langle p \rangle_\varphi$ の終点を e とする. p を始点とし e に至る既約分解された経路

$$p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_l = e \quad (11)$$

に対し

$$\alpha_i = F(p_{i-1} \rightarrow p_i) (\in \Pi), \quad 1 \leq i \leq l$$

とおき, 経路 (11) に W の元

$$w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_l} \quad (12)$$

を対応させる. このとき (12) は $w \in W$ の S の元による最短表示であり, 元 w は経路 (11) のとり方によらず $\langle p \rangle_\varphi$ だけで決まる. 逆に上のようにして得られた元 $w \in W$ からアルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ を復元することができる. それについて述べる前に少し準備が必要である. S のある元と共役な W の元の全体を T とする. S の元は単純鏡映, T の元は鏡映と呼ばれる. $R = W\alpha_*$ とおく. R の 2 元 γ, δ について $\delta < \gamma$ とは

$$\gamma - \delta \in \mathbb{Z}^+ \Pi, \quad \gamma \neq \delta$$

となることである. J を D_* 内で α_* と線分で結ばれていない Π の元の全体とし W の放物型部分群 $W_J = \langle s_\theta \mid \theta \in J \rangle$ を考える. Coxeter 群における標準的な結果により, 剰余類集合 W/W_J の元 vW_J に対し, その代表 v^J を任意の $\theta \in J$ に対し $l(v^J s_\theta) = l(v^J) + 1$ (l は W の元の最短表示の長さを表す) となるように選ぶことができ, しかもこのような代表は一意に決まる. 写像 $\rho: W\alpha_* \rightarrow 2^{W\alpha_*}$ を

$$\rho(\gamma) = \{t\gamma \mid t \in T, t\gamma < \gamma\}, \quad \gamma \in W\alpha_*$$

で定義し, 写像 $\sigma: W/W_J \rightarrow 2^{W/W_J}$ を

$$\sigma(vW_J) = \{tvW_J \mid t \in T, l((tv)^J) < l(v^J)\}, \quad vW_J \in W/W_J$$

で定義する. このとき 2 つのアルゴリズム $(W\alpha_*, \rho)$ と $(W/W_J, \sigma)$ は自然に同型である. 次の定理が $\langle p \rangle_\varphi$ における経路 (11) をもとに (12) によって定義された $w \in W$ を用いて元のアルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ を逆に構成する手段を与える.

定理 7 上の記号の下で

$$\langle p \rangle_\varphi \cong \langle w\alpha_* \rangle_\rho \cong \langle wW_J \rangle_\sigma$$

が成り立つ.

次の定理は (11), (12) によって得られる Coxeter 群の元 w の特徴付けを与える.

定理 8 任意の樹状グラフ D_* の 1 つの頂点を選び, それに α_* と記号をつける. Π_* を D_* の頂点集合とし $\Pi = \Pi_* \setminus \{\alpha_*\}$ とする. さらに V, s_α ($\alpha \in \Pi$), S, W, T, J を上と全く同様に定義する. Dynkin 図形が D_* と一致するような有限分岐な単項平明アルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ から (11), (12) によって得られる $w \in W$ の全体と次の同値な条件 (a),(b) (のいずれか) を満たす $w \in W$ の全体は一致する.

(a) $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_l}$ が S の元による w の最短表示とすると

$$s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_l} \alpha_* - s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_l} \alpha_* = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq l$$

が成り立つ.

(b) アルゴリズム $\langle wW_J \rangle_\sigma$ における既約な矢 $uW_J \rightarrow vW_J$ に対し $su^J = v^J$ であるような $s \in S$ が存在する.

定理 8 の条件 (a) は Peterson による minuscule 元の定義 [1] を多重辺のない Dynkin 図形に対する Weyl 群に限ったものと本質的に同じである. つまり, すべての有限分岐な単項平明アルゴリズムは多重辺のない Dynkin 図形に対応する Weyl 群の minuscule 元 w を用いて定理 7 の方法で実現でき, 従って上のような元 w の分類が有限分岐な単項平明アルゴリズムの同型類の分類を与える. そのような分類は既に Proctor[17] が与えているので有限分岐な単項平明アルゴリズムの分類も終了したことになる. 上では簡単のために多重辺のない Dynkin 図形に対応する Coxeter 群に限ったが, 多重辺をもつような Dynkin 図形 (Coxeter 図形) に対応する Coxeter 群の元から定理 7 の (b) の方法¹⁷⁾ で有限分岐な単項平明アルゴリズムが得られる場合が多くはないが存在する. 結晶的な Coxeter 群の元の場合は J. R. Stembridge[22] が行った多重辺のある Dynkin 図形に対応する Weyl 群の minuscule 元の分類と本質的に同じ結果になる. これ以外に非結晶的な Coxeter 群の元の場合があり, そちらの分類もできるが省略する.

7 色つきフック公式

ここでは仲田研登 [12] の結果を平明アルゴリズムの用語を用いて紹介する. その前に 5 節の結果との関係について述べる. 5 節の定理 5, 定理 6 はアルゴリズムとしての Y_p , つまりダイアグラムの性質であると考えられる. 6 節で述べたようにダイアグラムは基礎ダイアグラムを用いて調べることができる. 岡村と筆者がこの観点から [15] やその原型である [3] (10 節参照) の主定理を検討したところ, 証明の中で決定的な役割を果たす多変数有理式の恒等式が基礎ダイアグラムに共通の性質の反映であることがわかった. さらに平明アルゴリズムの用語を使ってその恒等式を書き下ろしてみると, 基礎ダイアグラムだけでなく一般のダイアグラムで定式化できることがわかり, 全く同じ式が一般のダイアグラムでも成り立つはずであるという予想が得られた. その後, 仲田が独自のアイデアを用いてその予想を証明した. それが下で述べる定理 9 である.

(P, φ) を有限分岐な平明アルゴリズムとし $p \in P$ とする. p を始点とする経路

$$\mathbf{p}: p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_l \quad (l \geq 0)$$

に対し、命題 5 で導入した写像 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}^+ \Pi(\langle p \rangle_\varphi)$ を用いて、 $\Pi(\langle p \rangle_\varphi)$ の元についての多項式

$$\mathcal{F}(\mathbf{p}) = \prod_{k=1}^l \{F(p_{k-1} \rightarrow p_k) + F(p_k \rightarrow p_{k-1}) + \cdots + F(p_k \rightarrow p_{k-1})\}$$

を定義する。ただし $l = 0$ のとき $\mathcal{F}(\mathbf{p}) = 1$ とする。[12] では多重辺も許した Dynkin 図形に対し predominant integral weight という概念が導入され、それが問題の定式化においても証明においても重要な役割を果たす。[12] の主結果 (の多重辺のない Dynkin 図形の場合) を平明アルゴリズムの用語を用いて述べると次のようになる。実例は 11 節にある。

定理 9 (仲田 [12]) (P, φ) を有限分岐な平明アルゴリズムとし $p \in P$ とする。上の記号の下で、次の‘色つきフック公式’が成り立つ。

$$\sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\mathcal{F}(\mathbf{p})} = \prod_{q \in Y_p} \left(1 + \frac{1}{F(p \rightarrow q)}\right) \quad (13)$$

ただし、左辺は p を始点とする経路 \mathbf{p} 全体にわたる和である。

標語的に言えば、等式 (13) の左辺はアルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ に関する巨大な和、右辺はダイアグラム Y_p に関する小さな積である。この意味で定理 9 は定理 2 に関連して述べた‘原理’のもうひとつの現れである。等式 (13) の両辺の $-|Y_p|$ 次の項をとり、さらにすべての $\Pi(\langle p \rangle_\varphi)$ の元を 1 に特殊化すれば定理 6 が得られる。 (P, φ) が基礎ダイアグラムの場合の定理 9 は [15] の中で多くの場合分けとコンピュータも用いた個別計算によって得られていた。等式 (13) は幾つかの方向に精密化できることが確実である。

8 中山アルゴリズム

この節では平明アルゴリズムの典型例としての中山アルゴリズムを取り上げる。本稿は前半 (1 節–7 節) で展開した一般論を、後半 (8 節–11 節) で中山アルゴリズムの場合に適用するという構成になっている。8 節は 2 節–3 節の一般論に対応している。

まず歴史的な経緯を振り返っておこう。対称群 S_m の (標数 0 の体上での) 既約表現の同値類の全体が箱の数 m のヤング図形全体と 1 対 1 に対応することは 1900 年前後の G. Frobenius や A. Young の仕事以来、よく知られている (例えば [6] 参照)。中山正は 1940–41 年の論文 [14] において、対称群の既約表現を素数 p を法として考えるという問題 (対称群のモジュラー表現論) を取り上げた¹⁸⁾。何かを p を法として考えるということは、その何かを p で割った余りに着目するということであるから、対称群の既約表現を p を法として考えるには、ヤング図形 $\div p$ の余りの概念が必要になるように思われる。これは中山論文 [14] を読んだ本稿筆者の後知恵に過ぎないが、実際に中山 [14] は任意の正整数 n に対して、ヤング図形 $\div n$ の余りに相当する図形を定義している。そのために [14] で導入されたのが、ヤング図形のフックの概念である。図 5 のヤング図形 Y において箱 x のフック $H(x) = H_Y(x)$ とは、 Y の箱のうち箱 x 以東または以南に位置するもの (図 5 の場合、箱 x と箱 y_1, y_2, \dots, y_5) 全体からなる Γ 字型の部分ヤング図形のことである。

14

論 説

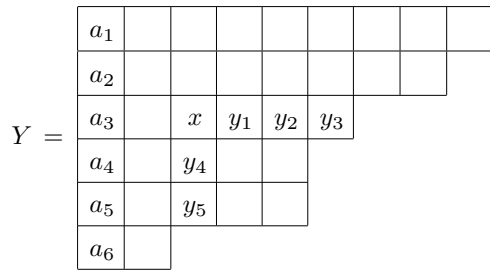


図 5 : ヤング図形 Y とそのフック $H(x)$

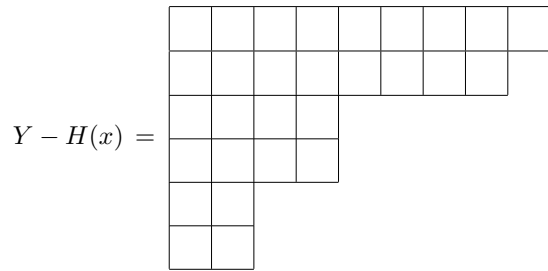


図 6 : ヤング図形 $Y - H(x)$

ヤング図形からフックを引くとは、元のヤング図形から（他の箱との間の境界線は残して）フックを消去し、その結果、離れ島ができるときには、その離れ島を北西方向に詰めることにより、新しいヤング図形を得ることを意味する¹⁹⁾。図 5 のヤング図形からフック $H(x)$ を引いて得られるヤング図形 $Y - H(x)$ が図 6 に示してある。フック H に含まれる箱の数をフック H の長さといい、 $l(H)$ で表す。図 5 のフック $H(x)$ の長さは 6 である。一般に、あるヤング図形 Y から長さが n の整数倍 kn のフックを 1 つ引いた結果は、 Y から長さ n のあるフックを引いて得られるヤング図形を Y' とし、 Y' から長さ n のあるフックを引いて得られるヤング図形を Y'' とし、... と次々と長さ n のフックを適切に選びながら k 回連続して引いた結果と同じになる。与えられたヤング図形 Y から長さが n またはその整数倍のフックを次々と引いていくと、そのうちに、もうそれ以上そのような操作を続行できないようなヤング図形、つまり長さ n のフックを含まないようなヤング図形 $c_n(Y)$ に到達する。 $c_n(Y)$ は空なヤング図形 \emptyset になることもある。ヤング図形 $c_n(Y)$ はそこに到達するまでの途中経過によらず、最初に与えられたヤング図形 Y と正整数 n だけで決まることが [14] で示されている。 $c_n(Y)$ を Y の n コアという²⁰⁾。これが $Y \div n$ の余りに相当する概念である。

中山 [14] にはヤング図形からフックを引くという操作を見やすくするための別の方法も示されている。図 5 のヤング図形 Y はしばしば $(9, 8, 6, 5, 5, 2)$ という広義単調減少正整数列（分割）と同一視される。これは Y の 1 行目の箱の数が 9 個、2 行目が 8 個、3 行目が 6 個、... という意味だが、同じヤング図形は $[14, 12, 9, 7, 6, 2]$ という狭義単調減少正整数列と同一視することもできる。こちらは図 5 のヤング図形の 1 列目の箱を 1 行目から順に $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$ とすると、フック $H(a_1)$ の長さが 14、 $H(a_2)$ の長さが 12、 $H(a_3)$ の長さが 9、... という意味で、[14] において Y の β 数と名づけられた数列である。図 6 のヤング図形 $Y - H(x)$ の β 数は $[14, 12, 7, 6, 3, 2]$ となる。 Y の β 数から 9 が消え、代わりに 3 が付け加わったことになる。しかも、これら 2 数の差 $9 - 3 = 6$ はフック $H(x)$ の長さに等しい。一般に、ヤング図形からあるフック H を引くことは、そのヤング図形の β 数に含まれるある数 s を 1 個取り除き、代わりに s より小さくしかも元の β 数には入っていなかったある数 s' を 1 個付け加えて新しい β 数をつくことにぴったり対応し、しかもこれらの 2 数の差 $s - s'$ はフック H の長さに等しくなる。この状況は図 7 のようなゲーム盤を用いると分かりやすい。 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ の元に対応するマス目を、一行に並べたゲーム盤において、与えられたヤング図形の β 数に対応するマス目に石を 1 個ずつ配置する。ヤング図形からフックを引くという操作はこの盤面上の石を 1 個選んで、今の数より小さい数に対応する空のマス目にその石を移すことに相当する。中山論文 [14] には図 7 のような盤こそ現れてはいないが、上述のように β 数のことばで数学的に同等なことが示されている。

$$p = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & \textcircled{2} & 3 & 4 & 5 & \textcircled{6} & \textcircled{7} & 8 & \textcircled{9} & 10 & 11 & \textcircled{12} & 13 & \textcircled{14} & 15 & 16 & 17 \\ \hline \end{array}$$
図 7: Y の β 数の場所に石 (印) を配置したゲーム盤

正整数 l を固定しておく. P を図 7 のタイプの盤上に l 個の石を, 各マス目に高々 1 個ずつ, 配置した状態全体の集合とし, $\varphi: P \rightarrow 2^P$ を

$$\varphi(p) = \{ (p \setminus \{s\}) \cup \{s'\} \mid s \in p, s' \in \mathbb{N} \setminus p, 0 \leq s' < s \}, \quad p \in P$$

で定義する. ただし, P の元 p は石を配置してあるマス目の番号の集合と同一視している. Q を行数が l 以下のヤング図形全体からなる集合とし $\psi: Q \rightarrow 2^Q$ を

$$\psi(Y) = \{ Y - H(x) \mid x \in Y \}, \quad Y \in Q$$

で定義する. このとき (P, φ) と (Q, ψ) は 1 節の意味でアルゴリズムであり, これら 2 つのアルゴリズムは上述の対応により同型である²¹⁾. これらのアルゴリズム (の同型類) を中山アルゴリズムと呼び, とくに (P, φ) および (Q, ψ) のことを, それぞれ中山アルゴリズムの一行表示²²⁾ およびヤング表示と呼ぶことにする.

中山アルゴリズムの一行表示 (P, φ) は有限分岐な平明アルゴリズムであることが容易にわかる²³⁾. この事実を出発点にとると, 2 節の最後で述べたように $p \in P$ に対し, 単項平明アルゴリズム $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラムの概念と p におけるフックの概念が生じる. この場合のダイアグラムとは p に対応するヤング図形 Y であり²⁴⁾, p におけるフックは Y におけるフックに一致する. (例えば p を図 7 の状態を表す点とすると $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラムは図 5 のヤング図形に一致する.) 正確に述べると, まずヤング図形 Y を箱を元とする集合と考え, これを状態空間とし, 分岐写像 $\mu: Y \rightarrow 2^Y$ は

$$\mu(x) = \{ y \in Y \mid x \in H(y), y \neq x \}, \quad x \in Y$$

で定義したとき $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラムはアルゴリズム (Y, μ) に同型である. さらに $p \rightarrow q$ であるような $q \in P$ をとり q に対応するダイアグラムを考えると, 後者は前者からフックを引いて得られることがわかる. こうして中山アルゴリズムの一行表示からヤング表示への移行 (とくにヤング図形とフックの概念, あるいはヤング図形から ‘フックを引く’ という操作) は平明アルゴリズムの一般論, とくにダイアグラムの概念, の中にずっと一般化された形で最初から組み込まれていることが分かる.

$p \in P$ を上の通り図 7 の状態を表すとすると $\langle p \rangle_\varphi$ の終点は $e = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ²⁵⁾, $\langle p \rangle_\varphi \cap \varphi^{-1}(e)$ は連結でその終点は $f = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$, $\langle p \rangle_\varphi \cap \varphi^{-1}(e) \cap \varphi^{-1}(f)$ は 2 つの連結成分をもち, それらの終点は $g = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$ と $h = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}, \dots$ となる. よって $\alpha_1 = (e \leftarrow f)$, $\alpha_2 = (f \leftarrow g)$, $\beta_1 = (f \leftarrow h), \dots$ とおくと, 3 節の意味での Dynkin 図形 $D(\langle p \rangle_\varphi)_*$ は図 8 のようになる. 3 節で $\langle p \rangle_\varphi$ の任意の矢 $a \rightarrow b$ に対し $\mathbb{Z}^+ \Pi(\langle p \rangle_\varphi) = \sum_{i=1}^9 \mathbb{Z}^+ \alpha_i + \sum_{j=1}^5 \mathbb{Z}^+ \beta_j$ の元に対応させる写像 F を考えた. ヤング表示で考えると, p に対応するヤング図形 Y を始点とする矢は Y からフック H を引くことを意味する. Y の箱に Dynkin 図形 $D(\langle p \rangle_\varphi)_*$ の α_* 以外の頂点を図 9 のように対応させる. 命題 4 を使っているが, 図 8 と図 9 を見比べれば対応のさせ方は明らかであろう. このとき 3 節の F は

$$F(Y \rightarrow (Y - H)) = H \text{ に含まれる箱に対応する } \Pi(\langle p \rangle_\varphi) \text{ の元の和}, \quad x \in Y \quad (14)$$

で与えられる. 例えば図 9 の Y において北西の隅の箱のフックを H とすると $F(Y \rightarrow (Y - H)) = \sum_{i=1}^9 \alpha_i + \sum_{j=1}^5 \beta_j$ である.

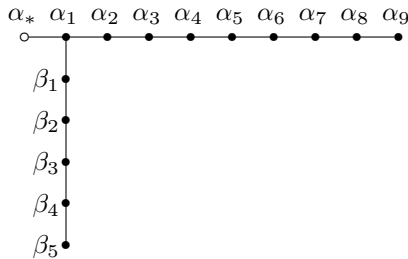


図 8 : Dynkin 図形 $D((p)_\varphi)_*$

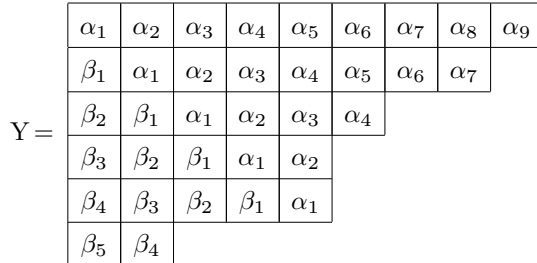


図 9 : ヤング図形から Dynkin 図形の頂点への対応

正整数 n に対し, $\varphi_n: P \rightarrow 2^P$ を

$$\varphi_n(p) = \{ (p \setminus \{s\}) \cup \{s'\} \mid b \in p, s' \in \mathbb{N} \setminus p, 0 \leq s' < s, s - s' \text{ は } n \text{ の倍数} \}, \quad p \in P$$

で定義する. (P, φ) の制限アルゴリズム (P, φ_n) は平明である. $p \in P$ に対し $\langle p \rangle_\varphi$ のダイアグラムをヤング図形 Y と同一視するとき, $\langle p \rangle_{\varphi_n}$ のダイアグラムは Y の部分アルゴリズム

$$\varphi_n(p) = \{ x \in Y \mid l(H(x)) \text{ は } n \text{ の倍数} \} \tag{15}$$

に一致する. これが 3 節で述べた意味での Y の n 商で, 高々 n 個のヤング図形の非交和にアルゴリズムとして同型である. ヤング図形の n 商は G. de B. Robinson によって導入され対称群のモジュラー表現についての中山予想²⁶⁾ の証明に用いられた (表現論における n 商の定義や応用については例えば [6] 参照).

9 Sato-Welter ゲーム

この節は 4 節の一般論に対応する. 中山アルゴリズムを 2 人ゲームと考えたものは国際的には ‘Welter のゲーム’ の名で知られている²⁷⁾. これは C. P. Welter[23] が最初にこの 2 人ゲームの基本定理 (始局面が与えられたとき, 先手と後手のどちらが必勝手順を持つかを判定する代数的条件) を証明したことによる. Welter[23] および, Welter と同じ結果の別証明を与えた J. H. Conway[2, Ch.13] はこのゲームを一行表示のみを用いて考えており, ヤング表示には言及していない. Welter[23] と同じ結果は独立に佐藤幹夫 [21] によっても得られた. ただし発表時期は Welter よりかなり後で, 日本語のみによる発表である. 佐藤 [20] によれば, 佐藤の研究には中山 [14] が影響しており, 実際, 佐藤 [18][19] は, このゲームには一行表示とヤング表示という 2 つの表し方があることとヤング表示を用いた場合の Sprague-Grundy 数を与える式が下の (16) や対称群の既約表現の次数のフック公式 (10 節参照) とよく似た式など同値ではあるが見かけの異なる幾つかの形に書けることを指摘している²⁸⁾. 本稿筆者はこのゲームにおいてはヤング表示が本質的に重要であると考え²⁹⁾ ので, 本稿においては中山アルゴリズムを 2 人ゲームとして考える場合には Sato-Welter ゲームと呼ぶことにする.

さて, この節の目的は Sato-Welter ゲームの完全な解析を Welter, 佐藤, Conway とは異なる視点から与えることである. 我々の主定理 (4 節の定理 3 と定理 4) は Sato-Welter ゲームを特殊な場合と

して含む 2 人ゲームのクラス (つまり 2 人ゲームと考えた平明アルゴリズム) に対し, 必勝手順を持つプレイヤーが先手, 後手のどちらであるかを判定する方法を与えるだけでなく, 勝つためにプレイすべき手を自動的に選別する手段も与えているという意味で Welter, 佐藤, Conway の結果より強い主張になっている.

ヤング図形 Y の n 商 (15) を $Y_{(n)}$ で表し

$$\varepsilon_i^{(2)}(Y) \equiv |Y_{(2^i)}| \pmod{2}, \quad \varepsilon_i^{(2)}(Y) = 0, 1$$

とすると, ヤング図形 Y に対する 2 進展開関数 $E^{(2)}$ の値は

$$E^{(2)}(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \varepsilon_i^{(2)}(Y) \tag{16}$$

で与えられる. 例えば, 図 5 のヤング図形 Y については $|Y| = 35, |Y_{(2)}| = 17, |Y_{(2^2)}| = 7, |Y_{(2^3)}| = 2, |Y_{(2^i)}| = 0 (i \geq 4)$ より $E^{(2)}(Y) = 1 + 2 + 2^2 = 7$ であるから, 定理 3 により Y を始局面とする Sato-Welter ゲームには先手の必勝手順が存在することが分かる³⁰⁾.

図 5 の局面 Y において先手が選ぶべき手を定理 4 に基づいて探す方法を説明する. まず, 図 8 の Dynkin 図形 $D(\langle p \rangle_\varphi)_*$ の α_* 以外の頂点にクラインの 4 元群 $G = \langle a, b \rangle (a^2 = b^2 = 1, ab = ba)$ の元を (6) で定義される写像 h によって対応させる. 写像 h とヤング図形 Y の箱に Dynkin 図形の頂点を対応させる図 9 の写像を合成すると, Y の北西の隅の箱に G の元 a を対応させ, その上で南北または東西に隣接する 2 個の箱には必ず a と b が交互に並ぶように対応させると図 10 のような写像が得ら

$$Y = \begin{array}{cccccccc} a & b & a & b & a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b & a & b & a & \\ a & b & a & b & a & b & & & \\ b & a & b & a & b & & & & \\ a & b & a & b & a & & & & \\ b & a & & & & & & & \end{array}$$

図 10: Y から Klein の 4 元群への対応

$$Y = \begin{array}{cccccccc} ab & a & b & ab & a & ab & 1 & b & a \\ 1 & b & a & 1 & b & 1 & ab & a & \\ b & 1 & ab & b & 1 & b & & & \\ a & ab & 1 & a & ab & & & & \\ ab & a & b & ab & a & & & & \\ ab & a & & & & & & & \end{array}$$

図 11: Y のフック内の元 (図 10) の積

れる. さらに $x \in Y$ に対し G の元

$$f(x) = \prod_{a \in H(x)} (\text{図 10 で箱 } a \text{ に対応している } G \text{ の元})$$

を対応させる. 図 11 にすべての箱 $x \in Y$ について対応する $f(x)$ を示してある. さて, 注釈 10) により, 先手は $E^{(2)}(Y - H) = 0$ となるような Y のフック H を探さねばならない. これは $E^{(2)}(Y) = 7$ より, $t = 0$ としたときの定理 4(ii) の第 3 の場合に該当するから Y の $(G, \langle b \rangle)$ 商

$$\varphi_{(G, \langle b \rangle)}(p) = \{x \in Y \mid f(x) = 1 \text{ または } b\} \tag{17}$$

に注目する. (17) の右辺を Y' とおく. 図 12 で文字が記入してある箱の全体が Y' である. Y' はアルゴリズムとして, 2×5 の長方形型のヤング図形と長さ 5 のフック型ヤング図形の非交和に同型で

ある. 上で Y に対して行なった計算を Y' に対して繰り返す. Y' における $y \in Y'$ のフックは一般式 (3) (において φ を $\varphi_{(G, \langle b \rangle)}$ でおきかえた式) で定義されるが, Y で考えた y のフックと Y' の交わりに一致する. $E^{(2)}(Y') = 1 + 2 = 3$ より, 今回も $t = 0$ としたときの定理 4(ii) の第 3 の場合に該当するから Y' の $(G, \langle b \rangle)$ 商に注目する. 図 10 と図 11 にそれぞれ相当する図 12 と図 13 から³¹⁾ Y' の $(G, \langle b \rangle)$ 商は図 13 で 1 または b が記入されている箱全体からなる図形 Y'' である. Y'' はゲームとしては 2 個と 3 個の石からなる 2 山の Nim の局面であるから, もう一度, 定理 4(ii) を使うまでもなく, 3 個の山から 1 個を除く手, つまり図 13 で第 3 行と第 6 列が交差する位置にある箱 (の Y'' における長さ 1 のフック) を除くのが先手にとっての唯一の良い手であることがわかる (例えば [4, 9.8] 参照).

		a				b	a	
a	b		a	b	a			
b	a		b	a	b			
		b						
		a						

図 12 : Y' から Klein の 4 元群への対応

		a				ab	a	
ab	a		1	b	ab			
b	1		a	ab	b			
		ab						
		a						

図 13 : Y' のフック内の元 (図 12) の積

従って, 同じ箱の Y におけるフックを引くのが Y をゲームの始局面とみたときの先手の唯一の良い手になる.

10 Greene-Nijenhuis-Wilf アルゴリズム

この節は 5 節の一般論に対応する. ヤング図形 Y が与えられたとき, 次の確率アルゴリズムを考える. まず Y の箱全体の中から 1 つの箱 x を等確率 $1/|Y|$ で選ぶ. 次に, フック $H(x)$ が x 以外の元を含むときには $H(x) \setminus \{x\}$ の中から 1 つの箱 y を等確率 $1/(|H(x)| - 1)$ で選ぶ. さらに $\{y\} \subsetneq H(y)$ なら $z \in H(y) \setminus \{y\}$ を等確率で選び, ... と繰り返していくと, いつかは $H(z) = \{z\}$ であるような箱 $z \in Y$, つまりフックの長さ 1 の箱に到達する. Y から箱 z を取り除いて得られるヤング図形を X とし, Y の代わりに X に対して同じ手順を繰り返す. 与えられたヤング図形 Y からフックの長さ 1 の箱を 1 個ずつ落としていき, 最終的に空なヤング図形 \emptyset に到達してアルゴリズムが終了する. これが C. Greene, A. Nijenhuis, H. S. Wilf [3] による確率アルゴリズムである. このアルゴリズムによって, ヤング図形 Y が徐々に縮小していき最終的に \emptyset に至る 1 つの消滅過程が選び出される. この経過を時間的に逆転させると, \emptyset から始まり 1 個ずつ箱が付け加わって最終的に Y に至るヤング図形の成長過程が得られる. Y の箱全体にこの成長過程における箱の出現順に $1, 2, 3, \dots, m$ ($m = |Y|$) と番号を付ければ, Y 上の標準盤が得られるから, Greene-Nijenhuis-Wilf アルゴリズムは Y の標準盤を生成するアルゴリズムと考えられる.

定理 10 (Greene, Nijenhuis, Wilf [3]) ヤング図形 Y における Greene-Nijenhuis-Wilf アルゴリズムは Y 上の任意の標準盤を等確率 $\prod_{x \in Y} |H(x)|/n!$ で生成する. とくに Y 上の標準盤の個数は上の確率の逆数に等しい.

この定理の後半は Y 上の標準盤の個数, つまり Y に対応する対称群の既約表現の次数, に対する有

名なフック公式 (例えば [6, 2.3], [11, 5.1.4] 参照) の別証明になっている. 5 節の定理 5 は定理 10 の自然な一般化である.

11 中山アルゴリズムにおける色つきフック公式

この節は 7 節の一般論に対応する. 中山アルゴリズムをヤング表示 (Q, ψ) (8 節参照) で考える. ヤング図形 Y を始点とする (Q, ψ) の経路

$$p: Y = Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow Y_l, \quad 0 \leq l \leq |Y| \quad (18)$$

とは, 任意の $1 \leq i \leq l$ に対して $Y_i = Y_{i-1} - H_{i-1}$ となるような Y_{i-1} のフック H_{i-1} が存在するようなヤング図形の列のことである. 図 9 のように Y の北西の隅の箱のフックに含まれる箱それぞれに相異なる変数を対応させ, 既に変数を対応させた箱から見て南東の方向の箱に元の箱と同じ変数を対応させる. Y またはその部分ヤング図形のフック H に対し H に含まれる箱に対応する変数の和を $[H]$ としたとき, (18) の経路 p には多項式

$$[p] = \prod_{k=0}^{l-1} \left(\sum_{j=0}^k [H_j] \right)$$

を対応させる. ただし $l = 0$ のとき $[p] = 1$ とする. (Q, ψ) における色つきフック公式は次のようになる.

$$\sum_p \frac{1}{[p]} = \prod_{x \in Y} \left(1 + \frac{1}{[H_Y(x)]} \right) \quad (19)$$

ただし, 左辺は固定されたヤング図形 Y を始点とする (Q, ψ) の経路 p 全体についての和である. Y が 2×2 の正方形型ヤング図形のときの (19) は仲田 [12] に具体的に書いてあるが, その場合ですら (19) の左辺はかなり長い式になる.

X を $m \times n$ の長方形型ヤング図形とし (8) の方式でアルゴリズムと考える. X の南東の角の箱を p とすると X は p で生成される単項平明アルゴリズムである. Y_1 を X の東端に並ぶ p 以外の $(m-1)$ 個の箱からなるヤング図形とし, Y_2 を X の南端の p 以外の $(n-1)$ 個の箱からなるヤング図形とする. 非交和 $Y = Y_1 \sqcup Y_2$ は X のダイアグラムである. (6 節の用語を使えば Y は単項ダイアグラム X の基礎ダイアグラムである.) この Y についての (19) が Greene, Nijenhuis, Wilf の論文 [3] に現れた ‘最も古い’ 色つきフック公式である.

注 釈

- 1) $P = \emptyset$ でもよいことにする.
- 2) 例えば連立 1 次方程式を解くアルゴリズムの場合, どの順序で未知数を消去しても構わないと考えるならアルゴリズムの途中経過は必ずしも一意ではない.
- 3) ここで扱う 2 人ゲームは文献 [2] で impartial game と呼ばれているタイプのものである.
- 4) グラフ理論で ‘有向グラフの直積’ と呼ばれているものと形式的には同じ概念である.
- 5) 詳細については別の論文を準備中である.
- 6) 有限でない平明アルゴリズムの例や有限だが有限分岐でない平明アルゴリズムの例については注釈 23) を参照.
- 7) もちろん, 公理 (P1)–(P4) が自然であることを前提にした上でのことである.
- 8) この節以降の多くの結果は, 適切な定式化の下では, 有限な平明アルゴリズムの場合に拡張することができる. 注釈 23) 参照.
- 9) 本稿では ‘グラフ’ という用語はとくに断らない限り多重辺のない無向グラフを意味するものとする.
- 10) P が連結なら $D(P)_*$ は連結な樹状グラフである.

- 11) $E_\varphi^{(2)}(p) = 0$ のとき, もし $\varphi(p) = \emptyset$ なら定義により後手が勝ちであり, もし $\varphi(p) \neq \emptyset$ なら (ii) より先手がどの局面 $p' \in \varphi(p)$ を選んでも $E_\varphi^{(2)}(p') > 0$ であるから, 後手は (i) により $E_\varphi^{(2)}(p') = 0$ である局面 $p'' \in \varphi(p')$ を選ぶことができ, ... 以下, 同様にすれば後手が必ず勝者となる. $E_\varphi^{(2)}(p) > 0$ のときの先手の必勝手順も同様である.
- 12) Grundy 数と呼ばれることもある. [2, Ch. 11] 参照.
- 13) [2, Ch. 6] 参照. 尚, Nim と呼ばれ良く知られているゲーム [2, Ch. 11][4, 9.8] は 4 節で考えているゲームに非常に特別な場合として含まれている.
- 14) 局面 p における (先手または後手の) 良い手を注釈 11) で述べた方法で探すには, すべての $q \in \varphi(p)$ に対して $E_\varphi^{(2)}(q)$ を計算することによって $E_\varphi^{(2)}(q) = 0$ となる q を見つけなければいけいように見える, という意味である.
- 15) $\varphi_{(G, (ab))} = \varphi_2$ なので, 部分群 $\langle ab \rangle$ に対応する場合だけなら Klein の 4 元群を持ち出さなくても定義できる.
- 16) Peterson が導入した概念である. 定義については [1] または [16] 参照.
- 17) 条件 (a) よりも条件 (b) の方が広い範囲で成立する.
- 18) これより少し前, R. Brauer が有限群のモジュラー表現論の研究を開始しており, その影響のもとで中山はこの問題に注目した.
- 19) 離れ島ができないときには, 単にフックを消去するだけでよい.
- 20) 中山 [14] は p を素数とすると, 対称群 S_n の 2 つの既約表現が同一の p ブロックに属するための必要十分条件は, それらに対応するヤング図形が同一の p コアを持つことであろうと予想した. この予想は, その後, Brauer と G. de B. Robinson により証明されたが, 現在も (対称群の表現論における) Nakayama Conjecture と呼ばれている. [6, Ch. 6] 参照.
- 21) 行数が $l - k$ ($k \geq 1$) のヤング図形は $0, 1, \dots, k - 1$ を含むような P の元に対応する.
- 22) 図 7 のような図形は, 佐藤幹夫が 9 節で扱うゲームをマヤ・ゲームと名付けたことから, マヤ図形と呼ばれることがある.
- 23) (P, φ^{-1}) は平明だが有限でないアルゴリズムの例になっている. また (P, φ) の定義において, 図 7 のゲーム盤をマス目が超限順序数にも対応するように拡張して同様のゲームを考えると, 有限だが有限分岐ではない平明アルゴリズムの例が得られる. 茅田 [10] で扱っている '超限 Sato-Welter ゲーム' を参照.
- 24) ここではヤング図形 Y とその転置 Y^t の区別をしていない.
- 25) ここでも P の元を石が置かれているマス目の番号の集合と同一視している.
- 26) 注釈 20) 参照.
- 27) 例えば [2, Ch.13] 参照.
- 28) ただし, 佐藤 [21] の証明 (Welter や Conway の証明とはかなり違う) にヤング表示が積極的に使われているようには見えない.
- 29) 理由として, 平明アルゴリズムの理論におけるダイ

アグラムの概念の重要性を示す 2 節の定理 2 とその 1 つの現れである 4 節の定理 4 (の Sato-Welter ゲームの場合) があげられる.

- 30) 定理 3 の直後でも述べたように, (16) は局面 Y の Sprague-Grundy 数を与える. Welter [23], 佐藤 [21] および Conway [2] は Y の (あるいは対応する一行表示の局面の) Sprague-Grundy 数を Nim 和を用いて与える別の公式を与えているが, 佐藤 [19] も指摘しているようにその式と (16) は同値である.
- 31) 図 12 をつくるとき Y' の 2 つの連結成分はそれぞれ独立に考える.

文 献

- [1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties and Schubert calculus*, In: Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S. Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991, pp. 23–57.
- [2] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, 1976.
- [3] C. Greene, A. Nijenhuis and H. S. Wilf, *A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape*, Adv. in Math. **31** (1979), 104–109.
- [4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [5] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [6] G. D. James and A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.
- [7] 川中宣明, *Sato-Welter game and Kac-Moody Lie algebras*, 組合せ論的表現論をめぐる話題, 数理解析研究所講究録 1190, 2001, pp. 95–106. <http://hdl.handle.net/2433/64735>
- [8] 川中宣明, *ゲーム・アルゴリズム・表現論*, 日本数学会 2008 年度年会企画特別講演アブストラクト.
- [9] 川中宣明, *フック構造を持つゲーム*, 第 55 回代数学シンポジウム報告集, 2010, pp. 195–208. <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/100809/pdf/kawanaka.pdf>
- [10] 茅田智幸, 佐藤のゲームの一般化, 組合せ論的表現論とその応用, 数理解析研究所講究録 1738, 2011, pp.24–33.
- [11] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 3 (Sorting and Searching), 2nd ed., Addison Wesley, 1998.
- [12] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, Osaka J. of Math. **45**(2008), 1085–1120.
- [13] K. Nakada and S. Okamura, *An algorithm which generates linear extensions for a generalized Young diagram with uniform probability*, In: Proc. 22nd International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2010), pp. 933–940.

フック構造をもつゲームとアルゴリズム

21

- [14] T. Nakayama, *On some modular properties of irreducible representations of a symmetric groups*, I, II, Japan J. Math. **17** (1940), 165–184, (1941), 411–423.
- [15] 岡村修志, 一般化された標準ヤング盤を等確率でランダムに生成するアルゴリズム, 大阪大学大学院修士論文, 2003.
- [16] R. A. Proctor, *Minuscule elements of Weyl groups, the numbers game, and d -complete posets*, J. Algebra **213** (1999), 272–303.
- [17] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ -minuscule Bruhat lattices and of d -complete posets*, J. Algebraic Combin. **9** (1999), 61–94.
- [18] 佐藤幹夫 (上野健爾 記), あるゲームについて, 第12回代数分科会シンポジウム報告集, 1968, pp. 123–136.
- [19] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記), マヤ・ゲームの数学的理論, 計算機におけるゲームとパズルの諸問題, 数理解析研究所講究録 98, 1970, pp. 105–135.
- [20] 佐藤幹夫, 序文, 数学のあゆみ, 15-1 (佐藤幹夫特集号)(1970), 1–8.
- [21] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記), Maya game について, 数学のあゆみ, 15-1 (佐藤幹夫特集号)(1970), 73–84.
- [22] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J. Algebra **235** (2001), 722–743.
- [23] C. P. Welter, *The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special group*, Indag. Math. **16** (1954), 194–200.

(2011年4月28日提出)

(かわなか のりあき・関西学院大学理工学部)