大 人 の 数 学

関西学院大学 理工学部　数理科学科　　川中 宣明

1　数学は望遠鏡に似ている・・・数学は何のためにあるのでしょうか？

初めまして、関西学院大学の川中と申します。
世の中の便利な道具はたいてい人間の力を補うためにあります。例えば、私は三田に住んでいるのですが、今日は JR で伊丹に来ました。江戸時代だと歩いて来るしか方法が無かったと思いますが、今は電車やバスという便利な移動手段があります。「歩く、走る」という人間の能力を補っているわけです。私はメガネをかけていますが、これは私の視力を補うためです。私より、もっとずっと目がよい人は沢山いますが、そういう人でも遠過ぎるものは見えないし、近くのものでも小さすぎると見えません。人間の視力には限界があるからです。望遠鏡や顕微鏡は、人間の視力を補って、普通なら見えないはずの遠いものや小さいものも見えるようにするための道具です。これと同じように、数学は人間の思考を助けるための道具で、いわば

人間がすること		**補助的に使う道具**
歩く	・・・	電車、バス
見る	・・・	望遠鏡、顕微鏡
考える	・・・	数学（数学のごく一部を機械の形にしたものがコンピュータ）

という関係にあると考えてよいと思います。ここで大事なことは「道具」はあくまで補助、ということです。望遠鏡や顕微鏡は何かを観察するための道具です。それを使って「土星の輪」や「細胞」を観察したいと思うのは人間ですし、その場合の使い方にも訓練や工夫が必要です。同じように、数学もきちんとした目的を持って上手に使わないと何の役にも立ちません。

漠然とした説明では納得して頂けないと思いますので、今から、幾つかの具体的な問題を考えてみます。「問題」と言いましても「大人の数学」ですから「中学・高校の数学」と違って試験はありません。ストレッチやヨガで、普段、あまり使わない関節や筋肉を伸ばすと気持ちいいように、頭の中の普段、使わないところを刺激すると「気持ちいい」のを実感して頂くのがねらいです。きっと、アンチ・エイジング効果も期待できると思います。

準備として 2 つの公式を用意します。

(1)　$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$　　次ページの上の図を見て下さい。面積 $(a+b)^2$ の大き

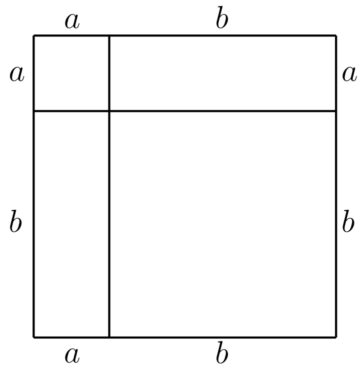
な正方形が

$$\text{面積 } a^2 \text{ の（左上隅の）小正方形　と　面積 } b^2 \text{ の（右下隅の）小正方形}$$

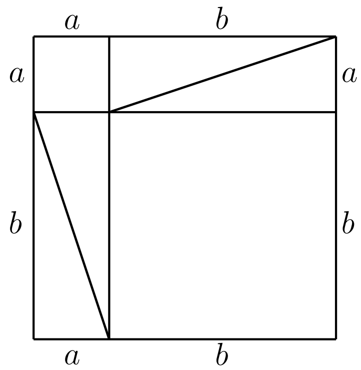
と

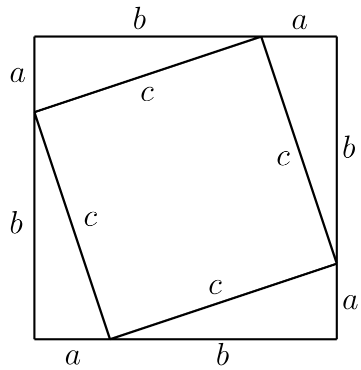
$$\text{面積 } ab \text{ の（左下隅と右上隅の）2 つの長方形}$$

に分かれています。つまり、この図は　$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$　であることを語りかけているのです。



(2) 三平方の定理（ピタゴラスの定理）　$a^2 + b^2 = c^2$　　下の 2 つの図を見て下さい。直角をはさむ 2 辺の長さが a と b であるような 4 枚の直角三角形を、1 辺の長さが $a+b$ であるような大きな正方形の内部に 2 通りの方法で配置してあります。この直角三角形の斜辺の長さを c とします。大きな正方形から、これら 4 枚の直角三角形を切り取った残りの面積は、左の図では　$a^2 + b^2$ (左上隅と右下隅の 2 つの小正方形の面積の和) で、右の図では c^2 (中央に残る斜めの正方形の面積）となります。つまり、これらの図は直角三角形の 3 辺の間に　$a^2 + b^2 = c^2$　という関係があることを語りかけているのです。





「近道の問題」

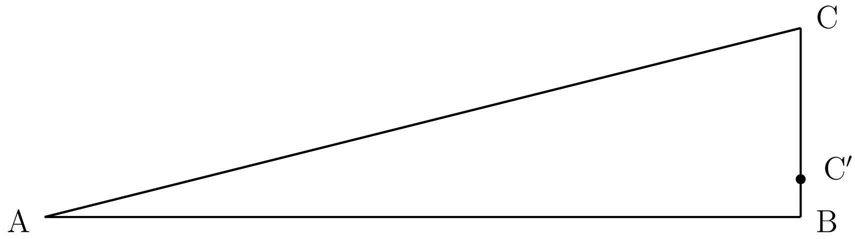
次ページの図を見て下さい。A 地点から B 地点まで 100 m の直線道路が延びていて、そこで道路が直角に曲がって 25 m 行ったところが C 地点とします。

$$\mathrm{AB} = 100m,\ \mathrm{BC} = 25m$$

さらに A 地点と C 地点を直線でつなぐ道もあるとします。A から C まで行くのに、A → B → C と行くより、直接 A → C と行ったほうが近いことは数学を勉強しなくても分かります。それでは、AC（の長さ）はどれくらいでしょうか？数学を使わず、直感的に考えた答えをお書きください。さらに、B → C の途中に点 C′ を

$$\mathrm{BC}' = 5m$$

となるようにとったとき、AC′ はどのくらいでしょうか？



AC は $\mathrm{AB} = 100m$ よりは遠く、$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 125m$ よりは近いので、$110m$ くらいかな、と考えがちです。AC′ も $101m$ くらいかなと思った方が多いのではないかと思います。実際には、三平方の定理（ピタゴラスの定理）と電卓を使って

$$\mathrm{AC} = \sqrt{100^2 + 25^2} = \sqrt{10625} = 103.0776\cdots$$

$$\mathrm{AC}' = \sqrt{100^2 + 5^2} = \sqrt{10025} = 100.1249\cdots$$

つまり　AC　 $103m\,8cm,$ AC′　 $100m\,12cm$ となります。（　は「大体、等しい」という意味の記号です。）思っていたよりも AC や AC′ が短いことに驚かれたのではないかと思います。このように人間の直感や経験は少し細かい話になると、全然、当てにならないのです。人間がサルからヒトへと進化する頃には、まだ直線の道路なんてありませんから、こういう直感が必要では無かった、ということかもしれません。ヒトは数学というメガネを使わないとこの欠点を埋められないのです。

上では電卓を使いましたが、電卓なしで、およその数値を出す方法があります。それは

$$\sqrt{1+x} \qquad 1 + \frac{x}{2} \qquad \text{（ただし、}\ x \quad 0\ \text{のとき）}$$

という近似公式です。高校の「数学 III」の教科書に微分の応用として出ていますが、微分を使わずに説明できます。まず公式 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ で $a = 1,\ b = \frac{x}{2}$ とおくと

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4} + x$$

ですが、$x \quad 0$ のとき $\frac{x^2}{4}$ は無視できて（例えば $x = 0.1$ なら $\frac{x^2}{4} = 0.0025$ となり、$\frac{x^2}{4}$ は「非常に小さい」ので無視できる。）

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \quad 1 + x$$

となります。よって両辺の平方根をとると

$$1+\frac{x}{2} \quad \sqrt{1+x}$$

となって上の近似公式が導かれます。この公式を使うと

$$\mathrm{AC}=\sqrt{100^2+25^2}=\sqrt{100^2\times\left(1+\frac{25^2}{100^2}\right)}=\sqrt{100^2}\times\sqrt{\left(1+\frac{25^2}{100^2}\right)}$$

$$100\times\left(1+\frac{625}{20000}\right)=100+\frac{625}{200}=103.085$$

$$\mathrm{AC}'=\sqrt{100^2+5^2}=\sqrt{100^2\times\left(1+\frac{5^2}{100^2}\right)}=\sqrt{100^2}\times\sqrt{\left(1+\frac{5^2}{100^2}\right)}$$

$$100\times\left(1+\frac{25}{20000}\right)=100+\frac{25}{200}=100.125$$

ですから、電卓による計算結果とほぼ合っています。慣れれば、暗算でも計算できます。

「スカイツリーの問題」

東京の新名所スカイツリーの天望デッキは地上 350 m ということです。望遠鏡も使うとして、この天望デッキからどの位、遠くまで見えるのかということを考えてみましょう。そもそも地球が平たいのなら、空気さえ澄んでいれば、アメリカだって見えるはずです。実際には、そうでないということが「地球が丸い」ことの何よりの証拠です。そこで、まずは地球の半径を計算し、その上で「スカイツリーからどこまで見えるか」を考えることにします。

メートル法は 18 世紀末、赤道から北極までの経度に沿った長さの 1000 万分の 1 を $1m$ と定めたのが起源です。 従って、地球の周囲はおよそ

$$4\times 1000\text{万}\ m=4000\text{万}\ m=4\text{万}\ km=40000km$$

です。また、地球の半径を $R\ km$ とすると

$$2\pi R=40000$$

よって

$$R=\frac{40000}{2\pi} \quad \frac{40000}{2\times 3.14} \quad 6370km$$

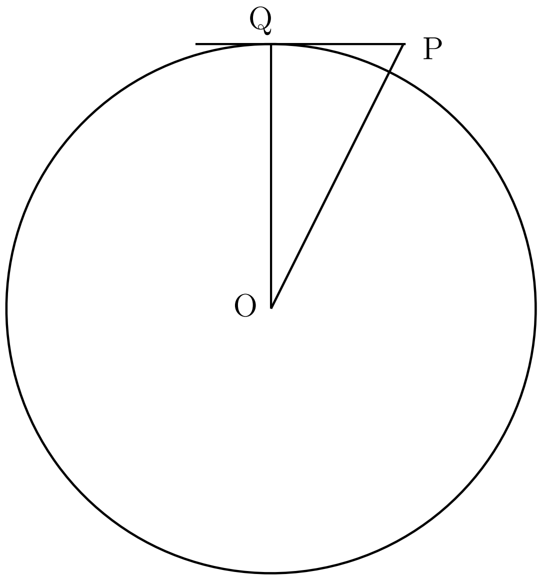
です。次ページの図とその下に書いてある計算により

$$\sqrt{(6370+0.35)^2-6370^2}=\sqrt{2\times 6370\times 0.35+0.35^2} \quad \sqrt{4459} \quad 66.7$$

ですから、（高い建造物などでなく、地面の近くのものを見るとすると）大体 $67km$ あたりまで見えるという計算になります。この計算はスカイツリーが立っているところが海面からそんなに高くないということが前提になっています。同様の計算で、目の高さが $2m$ の人が平地に立った場合

$$\sqrt{2\times 6370\times 0.002}=\sqrt{25.48} \quad 5km$$

くらいまでが見える限界ということになります。
富士山の頂上（標高 3776m）から、どのくらい遠くまで見えるか計算してみて下さい。（もちろん、別の山などに邪魔されないとして、ということです。）これを計算すれば、どのくらい遠くから富士山の頂上が見えるか、という問題も解けたことになります。



O ＝地球の中心、P ＝天望デッキ、Q ＝ P から見える限界点　とすると

$$\mathrm{OQ} = R \quad 6370,\ \ \mathrm{OP} = R + 0.35,\ \ \angle\,\mathrm{PQO} = 90^\circ$$

よって、ピタゴラスの定理から $\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{OQ}^2 = \mathrm{OP}^2$　よって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \sqrt{\mathrm{OP}^2 - \mathrm{OQ}^2} \\ &= \sqrt{(R+0.35)^2 - R^2}\end{aligned}$$

ここで、公式 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ において $a = R,\ b = 0.35$ とすると

$$(R+0.35)^2 = R^2 + (0.35)^2 + 0.7R \quad R^2 + 0.7R$$

（$(0.35)^2$ は小さいので無視する。）

よって

$$\mathrm{PQ} \quad \sqrt{0.7R} \quad \sqrt{0.7 \times 6370} = \sqrt{4459}$$

2　数学はお笑いに似ている・・・数学はどのようにできているのでしょうか？

年配の方なら「風が吹けば桶屋が儲かる」という冗談を聞かれたことがおありでしょう。江戸時代の本に書いてあることらしいですが、落語にも出てきます。ご存じない方のために、少し解説しますと

風が吹く⇒ 砂煙が立つ ⇒ 砂が目に入る ⇒ 眼病が増える
⇒ 三味線が売れる（昔は目の不自由な人が音曲で生計を立てることが多かったので）
⇒ 猫が減る（三味線に猫の皮を使うので）⇒ ネズミが増える⇒ ネズミが桶をかじって穴をあける ⇒ 桶屋がもうかる

原因と結果（「こうなったら、こうなる」）の連鎖で思いがけないことが起きる、という話で、もちろん実際には、こうなるとは限りません。ただ、この話の運びは数学とたいへん似ています。数学では「原因と結果」の代わりに「条件と結論」と言います。
例えば、前回お話したピタゴラスの定理の証明のときも

同じ形の４枚の直角三角形を正方形内部に２通りの方法で並べる（2 ページの下の図）
⇒ 正方形から４枚の直角三角形を除くと、残った面積は、どちらの場合も等しい
⇒ 面積が等しいことを式で書くと　$a^2 + b^2 = c^2$　が出る

という条件と結論（「この条件があると、結論はこうなる」）の連鎖でやはり思いがけないこと（ピタゴラスの定理）が出てきました。「風が吹けば・・・」と違うのは、数学における「連鎖」は、どの時代、どの場所でも 100 %正しいのに「風が吹けば・・・」の方は、せいぜい「日本のある時代では、こうなったら、こうなる（ことが多いようだ）」という程度で決して確実ではないという点にあります。
「風が吹けば・・・」の方の連鎖の各段階で「なぜ、こうなったら、こうなるのですか？」と根拠を問うと「常識（とか習慣）で、そうなる」くらいの答えしかないと思いますが、数学の場合、連鎖の各段階の理由はそれが「自明（全くのあたりまえ）」であるからです。「全くのあたりまえ」であるからこそ、時代や場所を越えて 100 %正しい、と言い切れるわけです。
ただし、数学では「条件」の方にも 100 %正しいことを要求します。条件が 100 %正しければ、結論も 100 %正しいですよ、というのが数学の世界のしくみです。

昨年から今年にかけてだったと思いますが、テレビで漫才のコンビが「あたりまえ体操」というのをよくやっていました。歌が付いていて、歌に合わせて「体操」のようなことをす

るのです。ご存じない方もおられると思いますので、あたりまえ体操の歌の最初のあたりだけ、ちょっと歌ってみます。

さあ、みんな、あたりまえ体操の時間だよ。今日も元気にいってみよー。
♪ 右足を出して、左足出すと・・・歩ける。あたりまえ体操 ♪

この後もまだまだ続きがあるらしいのですが、私が好きなのは、この一番最初の部分です。ここが数学のしくみによく似ていると思うからです。数学は「あたりまえ」の連鎖でできています。「右足を出して、左足出すと・・・歩ける」は数学とそっくりだと思うのです。これさえ分かれば、数学のしくみが分かったことになります。

ところで、数学が「あたりまえの連鎖」だとすると

１．数学を難しく感じる人が多い
２．あたりまえのことから、意外な結果が出てくる

のは何故でしょう？私の考えを申し上げてみます。

まず、1 ですが、普段の生活で私たちは「常識や習慣」を基にして判断することに慣れてしまっています。滅多に物事の核心にもどって一から考え直すことをしません。数学は一から積み上げて考えるという、普段の生活では使わない思考法をするため、難しく見えてしまうのではないかと思います。数学を勉強するとき「あたりまえ」の連鎖として理解するのでなく、自分の常識に合うように適当に改変して解釈してしまう人がいるようですが、これは数学の真の理解を妨げます。

次に 2 です。オセロというゲームをご存じですか？（囲碁、五目並べ（連珠)、将棋、チェスなどでも同じことです。）2 人が白と黒の石を交互に盤上に並べて、最終的に自分の色の石が多ければ勝ちです。ただし、白の石に挟まれた黒石は白石に変わり、黒に挟まれた白は黒に変わります。いったん、このルールを「あたりまえ」として受け入れてしまえば、後はすべて「あたりまえ」の連鎖です。単純なゲームですが、意外な展開がたくさんあって、まだ完全には解明されていません。これで分かるように、人間は「あたりまえ」の連鎖を「あたりまえ」と感じるほどには賢くないのです。そこで「あたりまえ」の連鎖を探求し、分かったことを「定理」として保存しておいて、それが使える状況になったときに思考の補助として提供する・・・これが社会における数学の役割です。オセロは 8×8 のマス目という狭い世界を舞台とするゲームですが、数学の舞台はもっとずっと広いので、意外なことはさらに一杯出てきます。それを探るのが数学者の仕事です。

「電車の問題」

電車がまっすぐなレールの上を $10m/$秒の一定速度で東に向かって静かに進んでいるとします。このとき、電車に乗っている人は車内で静止していても、地上からは $10m/$秒で動いているように見えます。車内の人が東に向かって $1m/$秒の一定速度で進むと、地上からは $11m/$秒で移動しているように見えます。また、車内で西方向に $1m/$秒で進むと、地上からは $9m/$秒で（後ろ向きに）動いているように見えます。整理しますと、ひどく簡単な公式になります：

電車の速度：$V\ m/$秒　　車内での人の速度：$a\ m/$秒　のとき

地上から見ると　　車内の人の速度は　$(V+a)\ m/$秒

ただし、東方向を正の向きと考え、西向きの速度は負の数で表すことにします。負の数が苦手な方は、同じ向きの速度は足し算になり、反対向きの速度は引き算になる、と考えて頂けば十分です。

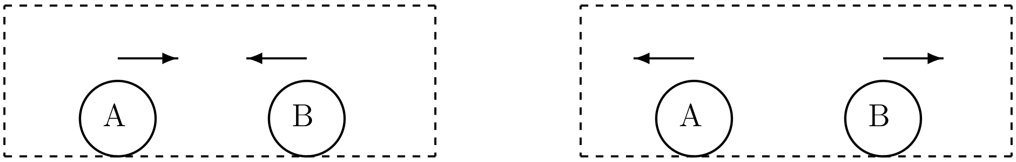
大事なことがもう一つあります。それは、電車自体は止まっていて電車の外の世界が反対向きに V m/秒で動いているとしても、同じ結論になるということです。等速直線運動の場合、電車と外の世界のどちらが動いているかは関係ありません。私たちが電車内から外の世界を眺めるのも、地上の人が車内を観察するのも同じことで、どちらも（物理的に見て）異常なことは何も起こりません。もちろん、車内の人が車内を観察しても異常なことは何も起こりません。

以上のことは、言われるまでもない程、あたりまえと思われるかもしれません。
実は、2 重の意味で、そうではないのです。まず、アインシュタインが 20 世紀の初めのころ、$V+a$ の公式は厳密には正しくないと言いました。実質的に問題になるのは、光速に近い速さを扱うときだけなのですが、今ではカーナビ（静止衛星からの電波を利用しています）などで、アインシュタインの理論が日常的に使われており、上の式よりアインシュタインの式の方が正しいことに疑いの余地はありません。そちらの話（アインシュタインの特殊相対性理論）は、今日のところは止めておいて、別の意味で上の話が必ずしも「分かり切ったこと」とは言えないということをお話ししたいと思います。

そのために「玉 A」と「玉 B」という 2 つの同じ材質、同じ大きさの玉があるとします。地上で、これらの玉が同じ速さ $1m/$秒でで近づき正面衝突すると、同じ速さ $1m/$秒で反対向きに跳ね返るとします。（上の図を見て下さい。）実際、鋼球やガラス球、ビリヤードの玉などはこのような「よく跳ね返る」種類の玉です。

さて、1 $m/$秒の等速で東に進む電車内で、玉 A が東向きに、玉 B が西向きにどちらも $1m/$秒で近づき、正面衝突するとします。地上のときと同様に、衝突後、玉 A は

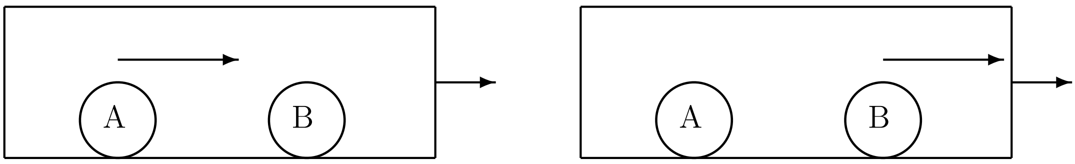
西向きに、玉 B は東向きにどちらも $1m/$秒の速さで跳ね返る、と車内では、見えます。（下図）



同じ光景を地上から見ると、どう見えるでしょうか？ 上で述べた公式 $V + a$ を使うと

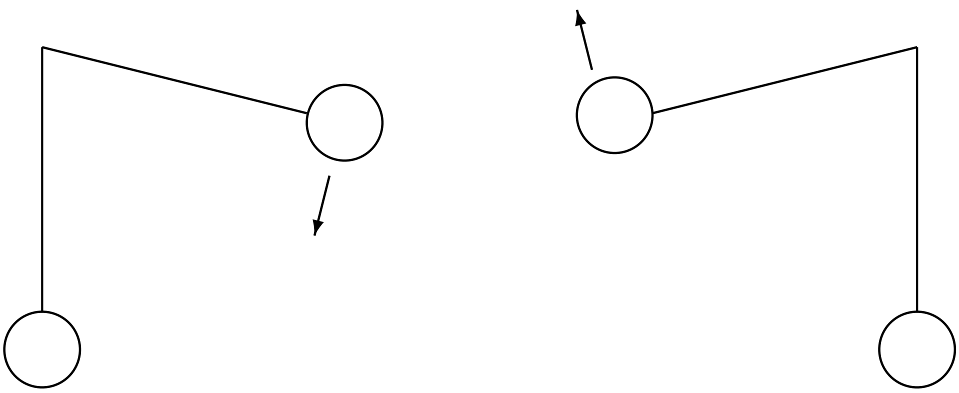
「玉 A は東向きに $2m/$秒で進み、静止している玉 B に衝突し、衝突の後、
玉 A は静止し、玉 B は $2m/$秒で東に進む。」

ように、地上からは、見えることがわかります。（下図）



このことから上の「」内と全く同じ現象が、地上でも起こることが分かります。

同様に考えると「同じ材質、同じ大きさの 2 つの硬い玉 A と B が正面衝突すると玉 A と玉 B の速度が交換される。」という（多分、やや常識に反した）一般的結論が出ます。高校で物理を勉強した方は、同じ問題を「運動量保存則」と「エネルギー保存則」の練習問題として解かれたかもしれません。ここでは、できるだけ物理の知識を使わずに、数学的に解いてみました。あたりまえと考えていたことも、少し深く掘り下げると、そこから意外な結論が出ることがある、という例になっていると思います。

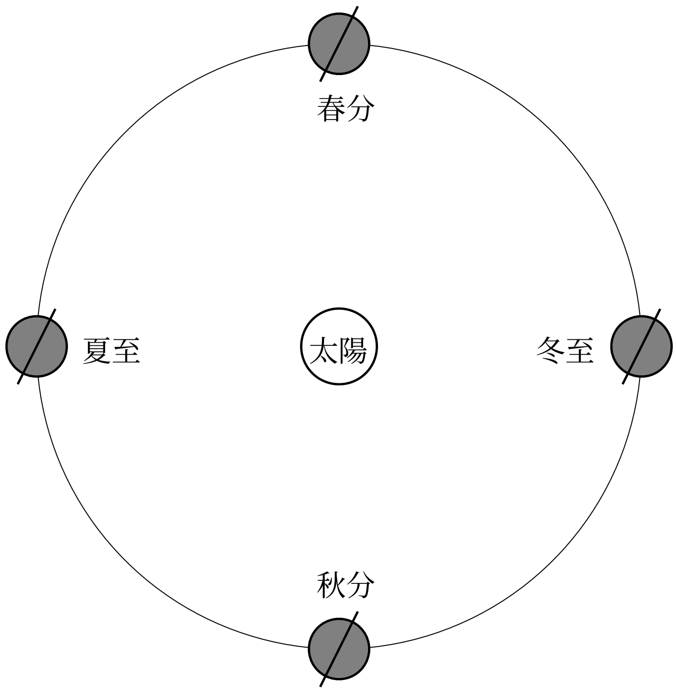


100 円均一ショップなどで売っているビー球を 2 個、用意し、$20cm$ くらいの長さの糸の両端にセロハンテープでビー球を貼りつけると、上で述べた現象を実際に目で確かめるこ

とができます。
糸の中央を持って揺すると、2 個のビー玉がカチカチとぶつかって、跳ね返るのが観察されます。ぶつかる時の速さと跳ね返った後の速さがほぼ等しいことは糸の振れ具合から分かります。次に、同じように糸の中央を持ち、一方のビー球だけをつまみ、もう一方が静止しているのを確認してから、つまんだビー球を離し、もう一方に衝突させます。衝突した瞬間、ぶつかった方のビー玉が静止するのが観察されます。（前ページの下の図）
机の上で、ビー球を衝突させても実験できそうに思えますが、これはなかなかうまくいきません。たいていの机の表面が完全には水平でないからです。

「カレンダーの問題」

カレンダーを見ますと、春分の日とと秋分の日が書いてあります。2013 年の春分の日は 3 月 20 日、秋分の日は 9 月 23 日です。また 2014 年の春分の日は 3 月 21 日です。



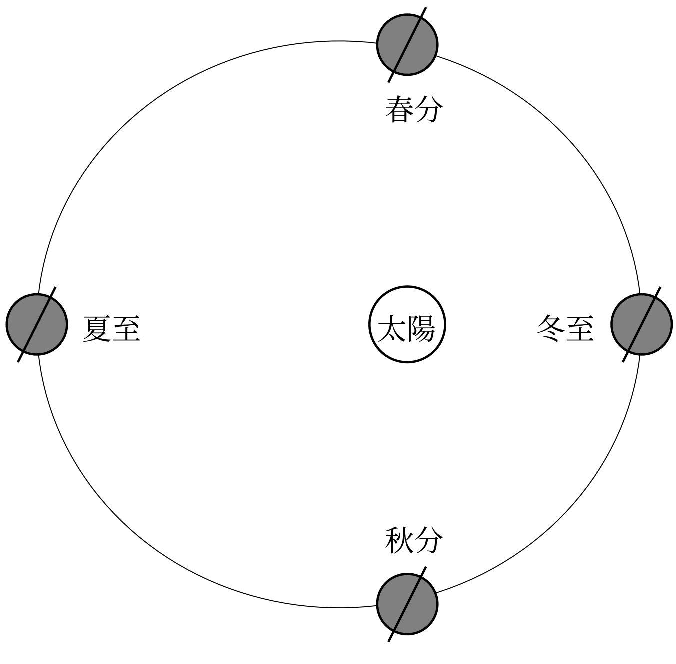
春分の日と秋分の日は昼と夜の長さが（ほぼ）等しい日です。また、夏至は昼の長さが最も長い日で、冬至は昼の長さが最も短い日です。地球の自転軸（地軸）が斜めになった状態で地球が太陽の周りを公転しているため、一年のうちで昼と夜の長さに長短が生じる、という説明が小学生用の図鑑などに載っていて、上のような模式図が出ていることがあります。

さて、上の説明と模式図が仮に正しいとすると、春分の日から秋分の日までの日数と、秋分の日から春分の日までの日数は、ほぼ等しいはずです。実際に、それぞれ計算して比べてみましょう。
まず、2013 年の春分の日（3/20）から秋分の日（9/23）までの日数を計算します。

3 月は 21 日から 31 日までの 11 日、4 月〜8 月は、それぞれ、30 日、31 日、30 日、31 日、31 日で、9 月は 1 日から 23 日までの 23 日、合計は 187 日となります。一方、2013 年の秋分の日 (9/23) から 2014 年の春分の日 (3/21) までの日数は 179 日（= 7+31+30+31+31+28+21）ですから、「春分→秋分」の日数の方が「秋分→春分」より 8 日も多いことがわかります。これは 2013 年に限ったことではなく、毎年、「春分→秋分」の方が「秋分→春分」より 7〜8 日程度、多いのです。これが 1 日か 2 日の差なら、何らかの誤差のせいにできますが、さすがに 8 日は誤差のせいにするには大きすぎます。一体、どういうことでしょう？

一般に、ある出発点から数学的に導かれる結果（今の場合は、小学生用の図鑑の説明から導いた「春分→秋分の日数＝秋分→春分の日数」という等式）が現実と合わない（矛盾する）場合、もともとの出発点自体が間違っていたと結論できます。このような例はたくさんあって、これもまた数学の役割のひとつなのです。

今の場合、私たちが出会った矛盾は前ページの模式図を下のものに置き換えることで解消されます。実際には地球が太陽の周囲をまわる軌道は円ではなく、楕円（だえん）になっていて、太陽は楕円の焦点（しょうてん）に位置しているのです。楕円や焦点については高等学校の「数学 III」で学びます。太陽の周りを回る惑星の軌道が楕円であることは、コペルニクスやガリレオも知らなかったことで、ケプラーが非常な苦労の末に発見し、後にニュートンが万有引力の法則とニュートンの力学法則から、この事実が数学的に導かれることを示しました。(大学物理の教科書に微分積分学を用いた導き方が出ています。）小学生にも出来るような足し算と引き算による「あたりまえ計算」が宇宙の神秘につながっているのです。



3 数学はラブレターに似ている・・・数学を好きになるには

数学は、文学や芸術（音楽、美術など）やスポーツと、そんなには違わないと思います。人間のすることですから、似たようなところが多いのは当然かもしれません。これらのものと同様、数学も、もともと楽しむためのものです。17 世紀ごろ、ガリレオやケプラーが、数学を使って天体などの研究するまでは「数学と自然科学は関係が深い」と思う人はほとんどいませんでした。ニュートン以降、数学と自然科学との関係が、どんどん密接になっていきました。これによって数学の進歩が加速したという良い面ももちろん大きいのですが、「数学を勉強しないといけない」という義務的な空気も強くなり、結果的に「数学嫌い」を大量に生みだしてしまいました。この「大人の数学」では、数学本来の姿である「楽しむ数学」を復活させることを目標にしてきました。楽しむことこそ、上達への近道ですから。

大人が数学を勉強するときは本で勉強することが多いと思います。そのとき「恋人からのラブレターのように」ていねいに読むことをお勧めします。ラブレターなら、読んですぐには意味が分からなくても「わからないけど、多分、こういう意味だろう」と勝手な解釈で済ませる、ことはないですよね。どういう意味か、何を伝えたいのか、よく考えると思います。数学の本も、できればそういう風に読んで下さい。そのうち「これは、あたりまえのことを言っているのだ」と分かってくると思います。中学生や高校生にも、問題集の前に、まず教科書をていねいに読んでもらいたいと思います。

今日は、この講座の最終回なので、残った時間の許す限り、皆さんから頂いた質問にお答えしていきます。

質問「なぜ $(-1)\times(-1)=1$ なのですか？」
この質問への答え方は 2 通りありますので、2 通りの方法でお答えします。
1 つ目は、実例で示す、という方法です。中学の教科書などでは、この方法を使っています。正の数と負の数を考えると便利なのは「ある方向とその反対」という 2 通りの方向を考えたいときです。東西に走る直線に沿って進む人がいるとします。このとき、東に向かう方向を正の数で、西に向かう方向を負の数で表すことにします。このとき「東へ秒速 $1m$ で進む」とは、そのまま「東へ向かって秒速 $1m$ で進む」ことですが、「東へ秒速 $(-1)m$ で進む」とは「西へ向かって秒速 $1m$ で進む」という意味です。また、基準となる点 O（原点 O）を直線上にとっておくと「O から東へ $1m$ の地点」はそのまま「O から東へ $1m$ 行った場所」のことですが「O から東へ $(-1)m$ の地点」とは「O から西へ $1m$ 行った場所」のことです。時間についても、未来と過去という 2 つの方向があります。未来の方向を正の数で、過去に向かう方向を負の数で表すと「3 秒後」はそのまま「基準の時刻から未来に向かって 3 秒進んだ時点」という意味ですが、「(-3) 秒後」とは「基準の時刻から過去に向かって 3 秒だけ戻った時点」という意味です。

さて、直線上を東に向かって秒速 $1m$ で進む人がいて、ある基準時刻に基準点 O を通過したとします。その 3 秒後に、この人は

$$1 \times 3 \ \ (m)$$

の地点、つまり O から東へ $3m$ の所にいます。それでは (-3) 秒後に、この人はどこにいるでしょうか。基準時刻から 3 秒だけ過去に戻ると

$$1 \times (-3) = -3 \ \ (m)$$

の地点、つまり O から西へ $3m$ の所にいることになります。
次に、同じ直線上を西に向かって秒速 $1m$ で進む人を考えます。やはり、ある基準時刻に基準点 O を通過したとします。その 3 秒後に、この人はどこにいるでしょう？今度は、秒速 $(-1)m$ で東に向かうとして計算すればよいので

$$(-1) \times 3 = -3 \ \ (m)$$

の地点、つまり O から西へ $3m$ の所にいることになります。また、(-3) 秒後、つまり基準時刻から 3 秒だけ過去に戻ると

$$(-1) \times (-3) = 3 \ \ (m)$$

の地点、つまり O から東へ $3m$ の所にいることになります。これで、負の数を含む掛け算を中学で習ったルールの通りに計算すると、きちんと現実に合っていることが分かります。以上が、1 つ目の説明（の一例）です。

1 つ目の説明には欠点があります。それは「なるほど、その実例では、確かに マイナス×マイナス＝プラス　だったが、別の例で、そうはならないこともありそうな気がする。」という反論が考えられるということです。そこで「あたりまえ体操」による 2 つ目の答え方を紹介します。
まず、幾つかの前提条件を正しいと認めることにします。それは

$$1 + (-1) = 0, \quad 0 \times (-1) = 0 \tag{1}$$

と

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \tag{2}$$

です。このうち、(1) 式は負の数というものを考える以上、こうでなくては困ると思いますので、納得して頂けると思います。(2) 式は「$a + b$ の答えに c を掛けたもの」は「$a \times c$ の答えと $b \times c$ の答えを足したもの」に等しい、という意味です。a, b, c がどんな数でも、(2) が成り立つことを認めて下さい。a, b, c が正の数や 0 の場合は、(2) が正しいことに問題はないでしょうが、a, b, c の中に負の数があっても正しいことを認めて下さい。「あたりまえ体操」では、最初の一歩を踏み出す前に、まずどこかに立たないといけません。(1) と (2)

は「最初に立つ場所」になります。
さて、(2) 式で $a = 1,\, b = -1,\, c = 1$ の場合を考えると

$$\{1 + (-1)\} \times 1 = 1 \times 1 + (-1) \times 1 \tag{3}$$

となります。(1) 式から $1 + (-1) = 0$ ですから、(3) 式の左辺は 0 です。よって、(3) 式から

$$1 + (-1) \times 1 = 0$$

であることが、分かります。この式から、今までに $(-1) \times 1$ の答えを知らなかったとしても

$$(-1) \times 1 = -1$$

とする以外にないことが分かります。
次に、(2) 式で $a = 1,\, b = -1,\, c = -1$ の場合を考えると

$$\{1 + (-1)\} \times (-1) = 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) \tag{4}$$

となります。(1) 式から、$1 + (-1) = 0$ と $0 \times (-1) = 0$ が成り立つので、(4) 式の左辺は 0 です。さらに、上で $(-1) \times 1 = -1$ であることが既に分かっているので、(4) 式から

$$0 = -1 + (-1) \times (-1)$$

であることが分かります。この式から、$(-1) \times (-1)$ は 1 と定めるしかないことが分かります。
これが 2 つ目の説明です。出発点となる (1) と (2) が成り立つように、掛け算を定めようとすると、中学で学ぶルール以外の選択肢はないことが（「あたりまえ」の連鎖によって）分かります。数学の立場からは 2 つ目の説明が正統的な考え方ですが、中学生にこれを教えるのはまだ早い、という教育的配慮から、中学教科書では 1 つ目の説明を採用しています。そのため、大部分の人は 2 つ目の説明を聞く機会がなくなってしまっています。

質問「ツルカメ算を教えて下さい。」

ツルとカメが何匹かいます。ツルとカメを合わせた頭の数を数えたら 10、ツルとカメを合わせた足の数を数えたら 34 でした。ツルとカメはそれぞれ何匹いるでしょう？

これが典型的なツルカメ算の問題です。江戸時代には和算と呼ばれる「楽しむ数学」がありました。ツルカメ算もその一つです。ナンセンスであることは百も承知で、ツルとカメの問題で楽しんだ江戸時代の人々の大らかなユーモア感覚を味わって下さい。「頭の数と足の数を数えるヒマがあったら、ツルが何匹、カメが何匹と数えればよいではないか。」なんてことを言うのは野暮というものです。
この問題には和算としての解き方ももちろんあります。（ご質問の趣旨も和算の解き方を知りたい、ということだったかもしれません。）ここでは未知数 x を使って解くことにします。

この方法が応用範囲が広く非常に重要だからですが、ユーモラスな雰囲気を損なわないように気をつけて説明したいと思います。

皆さんの中には「ツルカメ算なら自分は解ける」と思っておられる方も沢山おられるでしょう。しかし、その場合でも「知っているから」と思わずに、きちんと私の話を聞いてみて下さい。数学は「あたりまえ体操」ですが、目的地への道は一通りではありません。多くの道順を知っている方が理解が深まります。目的地に着いたとしても、道はそこで終わっているわけではありません。そこからさらに新たな「あたりまえの一歩」を踏み出そうとするとき、いろいろな道を知っていることが役に立ちます。「知っているから」という理由で興味を失ってしまうと、新たな一歩を踏み出す機会を逸してしまうかも知れません。

テレビの推理ドラマとか、漫画とか、小説の中で、宝石を盗んだ犯人（怪盗 x）の正体がまだ分かっていない段階で、誰かが怪盗 x の行動の真似をしてみて、そこから犯人を見つける手がかりを探す、といった筋書きのものを見たり、読んだりしたことはありませんか？
上の問題では「怪盗」は「ツルの頭数」です。それで、例えば「6」に怪盗 x のフリをしてもらうことにします。このとき

$$\text{ツルの頭数} = 6 \qquad \text{ですから} \qquad \text{カメの頭数} = 10 - 6 = 4$$

です。そして

$$\text{ツルの足の数} = 6 \times 2 = 12, \qquad \text{カメの足の数} = 4 \times 4 = 16$$

ですから

$$\text{ツル、カメを合わせた足の数} = 12 + 16 = 28$$

となり、問題文の 34 と合っていません。だから「6」に怪盗 x のフリをしてもらったけれど、やはり本物の怪盗 x ではなかったね、ということになります。そこで、今度は「6」に x と書いたお面をかぶせて顔を隠してもらいましょう。そうすると

$$\text{ツルの頭数} = x \qquad \text{ですから} \qquad \text{カメの頭数} = 10 - x$$

です。よって

$$\text{ツルの足の数} = x \times 2, \qquad \text{カメの足の数} = (10 - x) \times 4$$

ですから

$$\text{ツル、カメを合わせた足の数} = x \times 2 + (10 - x) \times 4$$

となります。よって、問題文と合っているためには

$$x \times 2 + (10 - x) \times 4 = 34 \tag{5}$$

であればよいことになります。(左辺の計算は、 カッコの中、 掛け算、 足し算と引き算、という順序で行う取り決めになっています。また、式 (5) は $2x+4(10-x)=34$ と書くのが普通ですし、便利ですが、(5) のように書いても構いません。)
さて、式 (5) が成り立つような怪盗 x の正体を見つければよいのですが、そのために公式

$$(a-b)\times c = a\times c - b\times c, \qquad c\times(a-b) = c\times a - c\times b \tag{6}$$

を使います。この公式の a, b, c はどんな数でもよくて、x でも(まだ正体は分かっていませんが、x も数なので)構いません。そこで (6) で $a=10,\ b=x,\ c=4$ とすると

$$(10-x)\times 4 = 10\times 4 - x\times 4$$

となります。ですから、(5) は

$$x\times 2 + 40 - x\times 4 = 34 \tag{7}$$

と書き直すことができます。$a=2,\ b=4,\ c=x$ として、もう一度、(6) を使うと

$$x\times 2 - x\times 4 = x\times(2-4) = x\times(-2)$$

ですから、(7) は

$$x\times(-2) + 40 = 34$$

と書き換えられます。これは

$$x\times(-2) = -6 \tag{8}$$

というのと同じことであり、(8) は

$$x = 3$$

というのと同じことです。これで x の正体が分かりました。つまり、ツルは 3 匹です。また、カメは 7 匹です。

上で説明しました「方程式の立て方」(式 (5) の見つけ方)は(中学レベルだけでなく、高校・大学レベルまで)非常に応用範囲が広く、これさえ完全に身につければ、何百題もの練習問題を解く必要はなくなります。要点は「今、考えている問題に対して、ある数が正解かどうかを確認できる」なら、その数の代わりに x と書くだけで、方程式が立てられる、ということです。逆に言うと「ある数が正解かどうかを確認する方法が分からない」ようなら、まだ方程式を立てる準備ができていないのです。例えば、問題文に出てくる言葉の意味の理解が十分ではない場合、などがそれです。

これら以外にも、まだまだ、沢山のご質問を戴きましたが、残念ながら時間が来てしまいましたので、これでおしまい、ということに致します。こんなに多くの方々が最後まで興味を持って聞いて下さったことに感謝致します。また、お会いできるといいですね。