

数学入門演習 期末テスト

2010年7月29日

1. A, B は集合とする. 次の事柄を \cap (共通部分) と \cup (合併) を (記号、用語どちらも) 使わず、代わりに「かつ」と「または」を使って言い換えよ. 使ってよい記号は $x \in A, x \in B, x \notin A, x \notin B$ だけで、使ってよいことばは「かつ」と「または」だけである. 証明はしなくてよい. (20点)

(a) $x \in A \cap B$ (b) $x \notin A \cap B$ (c) $x \in A \cup B$ (d) $x \notin A \cup B$

2. 集合 A, B が与えられたとき、集合 $A \times B$ を

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B\}$$

で定義する. 次の問いに答えよ. (20点)

(a) A, B は集合とする. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ を証明せよ.

(b) A, B, C, D は集合とする. 上の (a) の結果を使って次の式を証明せよ.

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D).$$

3. 集合 A, B, C について、次の問いに答えよ. 分配法則とド・モルガンの法則は、使えるかどうかは知らないが、使ってもよい. (A, B, C は全体集合 U の部分集合としてよい.) (20点)

(a) $A \setminus B \subset C \implies A \setminus C \subset B$ を証明せよ.

(b) 集合 A, B が与えられたとき、集合 $A \Delta B$ を

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

で定義する. 次のことを証明せよ.

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \Delta B) \Delta C \quad \text{かつ} \quad A \cap B \cap C \subset (A \Delta B) \Delta C$$

(ヒント: $(A \Delta B) \Delta C$ の図をかいて考えるとよい. もちろん図だけでは証明とは認められないが.)

4. 次の問いに答えよ. (20点)

(a) 自然数 n に対して $(0, \frac{1}{n}) = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < \frac{1}{n}\}$ とする. 次の証明せよ.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

(b) 「 a は有理数でない $\implies 2a$ は有理数でない」を背理法により証明せよ.

5. A, B は空でない集合とする. 写像 $f: A \rightarrow B$ と写像 $g: B \rightarrow A$ に対して、次を証明せよ. (20点)

(a) $g \circ f = i_A$ であるとき、 g は全射写像であり、 f は単射写像である. (ただし、 i_A は A の恒等写像.)

(b) $g \circ f = i_A$ かつ $f \circ g = i_B$ であるとき、 $g = f^{-1}$ である.

[注意] 推論はできる限り省略せずにかくこと. 記号だけでなく適切な文も必要である. 正しい推論をしていることが確認できない場合には減点または0点となる.