「行列と群」中間テスト (2010 年 6 月 15 日)

計算経過もできるだけ省略せずに書くこと。必要な計算経過が読み取れない場合は減点または 0 点となる。

1. ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^3$ の元からなる次の列を, $\mathbb{R}^3$ の標準的内積のもとで, シュミットの直交化を用いて正規直交化せよ. 計算経過もかけ. (20 点)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数全体のベクトル空間 V に内積

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in V$$

を入れたとき, V の元からなる次の列をシュミットの直交化を用いて正規直交化せよ. 計算経過もかけ. (20 点)

$$f_1(x) = 1 + x,\ f_2(x) = x + x^2,\ f_3(x) = 1$$

3. 内積が定義されている実ベクトル空間 V において成り立つシュワルツの不等式をかけ. とくに, V と V 上の内積が問 1 および問 2 の通りであるとき, シュワルツの不等式の具体的な形を, それぞれかけ. (前半は抽象的な（内積つき）ベクトル空間における不等式をかくこと. 後半は前半の不等式を問 1 , 問 2 の具体的な（内積つき）ベクトル空間 V と V の一般の元に適用したとき得られる不等式をかけ.) (20 点)

4. (i) $n \times n$ の実行列 P が直交行列であるための条件（定義）をかけ. 何通りかの同値な条件があるが一通りだけかけばよい.
(ii) $n \times n$ の実行列 P が直交行列であるとき, P の行列式について何が成り立つか? 証明とともに答えよ.
(ii) 2×2 の直交行列をすべて求めよ. 計算経過もかけ. ((i)(ii)(iii) で計 20 点)

5. 次の行列がユニタリ行列になるように a, b, c を定めよ. ただし, a, b は複素数, c は正の実数とする. 計算経過もかけ. (注意：教科書に出ている問題を修正した.) (20 点)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{7}} & \frac{2i}{\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$