「行列と群」期末テスト (2010 年 7 月 20 日)

計算経過もできるだけ省略せずに書くこと。計算経過が読み取れない場合は減点または 0 点となる。

1. ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の元からなる次の列を, $\mathbb{R}^3$ の標準的内積のもとで, シュミットの直交化を用いて正規直交化せよ. (20 点)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. (i) 2×2 の直交行列をすべて求めよ. (証明も必要)
   (ii) S を直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する平面 $\mathbb{R}^2$ 上の対称移動を表す 2×2 行列, T を原点を中心とする角 60 °の回転を表す 2×2 行列とする. 行列 S, T を具体的にかけ. また, これらの行列の積 ST はどのような移動を表す行列であるかをかけ. ただし, ST が回転の場合は回転角と回転の中心を, ある直線に関する対称移動の場合は, その直線の方程式をかけ. ((i),(ii) で計 20 点)
3. xy 平面 $\mathbb{R}^2$ における曲線 $x^2 + 4xy + 2y^2 + 1 = 0$ を $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に関する 座標系に座標変換にすることによって標準形にしたい. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ をどのように選べばよいか. そのときの標準形もかけ. (20 点)
4. 次の行列 Q が直交行列となるような実数 a, b, c を求めよ. (20 点)

$$Q = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -b & b & 0 \\ -c & -c & 2c \end{pmatrix}$$

5. 次の対称行列 A に対し, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P をひとつ求めよ. また, 対角行列 $P^{-1}AP$ も求めよ. (20 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ヒント：A の固有値のうちのひとつは 2 である.)