

## 「行列と群」中間テスト (2011年5月19日)

試験時間 70 分, 満点 110 点

1. (i)  $P$  は  $n \times n$  の実行列とする.  $P$  が直交行列であるための条件 (つまり直交行列の定義) をかけ. 同値な条件がいくつかあるが, そのうちのひとつをかくこと.  
(ii)  $n \times n$  の実行列  $P$  が直交行列であるとき,  $P$  の行列式について何が成り立つか? 証明とともに答えよ.  
(iii) (i) にかいた条件を元にして, 2 次直交行列をすべて求めよ. (証明も必要.)  
( (i)5 点, (ii)10 点, (iii)20 点 )

2. (i) ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の元  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  と  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の組が正規直交基底になっているための条件 (正規直交基底の定義) をかけ.  
(ii) ベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の元  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を (i) の正規直交基底を用いて  $x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b}$  とかいたときの係数からできるベクトル  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  を求めよ. (証明も必要.)  
( (i)5 点, (ii)15 点 )

3. 次の 2 次式を  $(x \ y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ( $A$  は  $2 \times 2$  行列), または  $(x \ y \ z)B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  ( $B$  は  $3 \times 3$  行列) の形にかき表せ. (答えのみで良い.)  
(i)  $xy$     (ii)  $x^2 - xy + y^2$     (iii)  $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 4xy + 3yz + 2zx$   
( (i)5 点, (ii)5 点, (iii)10 点 )

4. (i)  $n \times n$  の実正方行列  $A$  の固有値と固有ベクトルの定義をかけ.  
(ii) 次の行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ. (計算過程もかくことが必要.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (iii) 上の行列  $A$  に対して  $P^{-1}AP$  が対角行列となるような正方行列  $P$  と対角行列  $P^{-1}AP$  を求めよ. (答えのみでもよい.)  
(iv) (iii) の行列  $P$  を直交行列になるように選べ. (計算過程も必要)  
( (i)5 点, (ii)15 点, (iii)5 点, (iv)10 点 )