

「代数入門」中間テスト (2010 年 11 月 9 日)

計算や論証の経過もできるだけ省略せずに書くこと。必要な計算や論証が読み取れない場合は減点または 0 点となる。満点は 110 点。

1. 次の方程式のすべての整数解を求めよ。(5 点 × 4)
 - (a) $14x+6y=6$
 - (b) $14x-6y=4$
 - (c) $14x+7y=6$
 - (d) $13x+6y=53$
2. 1849 と 2048 の最大公約数を d とする。次の問いに答えよ。(10 点 × 3)
 - (a) ユークリッドの互除法を用いて d を求めよ。
 - (b) ユークリッドの互除法を用いて、方程式 $1849x+2048y=d$ の 1 つの整数解を求めよ。(a) と (b) は同時に解いてもよい。
 - (c) 方程式 $1849x+2048y=d$ のすべての整数解を求めよ。
3. 次の問いに答えよ。(10 点 × 2)
 - (a) 素数の定義をかけ。また、40 以下の素数をすべてかけ。(答えをかくだけでよい。証明はいらない。)
 - (b) 2 以上 1000 以下の自然数で 30 以下のどの素数でも割り切れないものは素数であろうか？また、2 以上 1000 以下の自然数で 32 以下のどの素数でも割り切れないものは素数であろうか？どちらの問いに対しても、正しくない場合は反例をあげ、正しい場合は証明せよ。
4. a, b, c は自然数とする。以下のことを証明せよ。(10 点 × 4)
 - (a) $a|b, b|c$ のとき $a|c$
 - (b) $ac|bc$ のとき $a|b$
 - (c) $a|bc, (a, b) = 1$ のとき $a|c$
 - (d) m を a, b の最小公倍数とし、 n を a, b の公倍数とすると $m|n$

問題 4 の証明において、次のことは証明なしで使って良い。ただし、たとえば (1) を使う場合は、必ず「ここで (1) を使うと、・・・」などを書いておくこと。

- (1) h, k を自然数とすると $h = qk + r, 0 \leq r < k$ となる整数 q, r がただ 1 つ存在する。
- (2) h, k を自然数とし、 $d = (h, k)$ とすると $hx + ky = d$ となる整数 x, y が存在する。