数学演習 II 補充問題シート３（２００９年７月６日）

G, H を群とする．写像 $f\colon G \longrightarrow H$ が（群の）**同型写像** (isomorphism) であるとは, 次の２条件 (i)(ii) が成り立つことである．
(i) $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2), \quad g_1, g_2 \in G,$ (ii) f は１対１かつ上への写像である．
２つの群 G と H の間に同型写像があるとき, G と H は同型であるといい, $G \cong H$ とかく．
条件 (i) が成り立つような写像 $f\colon G \longrightarrow H$ を G から H への（群の）**準同型写像**という．
以下の問いに答えよ．G, H, K は群とする．

(1) $f\colon G \longrightarrow H$ が同型写像のとき, その逆写像 $f^{-1}\colon H \longrightarrow G$ も同型写像であることを示せ.
(2) $f\colon G \longrightarrow H$ と $g\colon H \longrightarrow K$ が同型写像のとき, 合成写像 $g \circ f\colon G \longrightarrow K$ も同型写像であることを示せ．f と g が準同型写像のときはどうか？
(3) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, $f(e_G) = e_H$ であることを示せ．ただし, e_G, e_H はそれぞれ G, H の単位元とする．
(4) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ $(g \in G)$ であることを示せ.
(5) a を位数 ∞ の G の元とし, $\langle a \rangle$ を無限巡回群 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とする． このとき $f(n) = a^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \langle a \rangle$ は群の同型写像であることを示せ.
(6) n を自然数, $\langle a \rangle$ を位数 n の巡回群 $\{a^{\mathrm{k}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ とする．$f(n) = a^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \langle a \rangle$ は群の準同型写像であることを示せ.
(7) S_n を n 次対称群とする．$sgn\colon S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ は群の準同型写像であることを示せ.
(8) $f\colon G \longrightarrow H$ が同型写像とし, $f(g) = h$ とする．g と h の位数は等しいことを示せ．f が準同型写像のときはどうか？
(9) S_4 の２つの部分群 $A = \{e, (1234), (1234)^2, (1234)^3\}$ と $B = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$ は同型ではないことを示せ.
(10) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, f の像 $f(G) = \{f(g) \mid g \in G\}$ は H の部分群であることを示せ.
(11) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, f の**核**（kernel）$\mathrm{Ker}(f) = \{g \in G \mid f(g) = e\}$ は G の正規部分群であることを示せ. (6)(7) の準同型写像の kernel を求めよ.
(12) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, f が１対１写像であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$ となることである.