

数学演習 II 補充問題シート 2 (2009年5月25日)

G を群とする。 G の空でない部分集合 H について、 次の 2 条件 (i)(ii) が成り立つとき、 H は G の部分群であるという。

- (i) $h_1, h_2 \in H \implies h_1 h_2 \in H$ (H は積について閉じている),
- (ii) $h \in H \implies h^{-1} \in H$ (H は逆元をとる操作について閉じている)。

このとき、 H は G における積に関して群となる。 部分群についての以下の問いに答えよ。

- (1) G を群とし、 $a \in G$ とする。 a の位数が有限なら $H = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ は G の部分群であることを示せ。 a の位数が無限大の場合はどうか？
- (2) \mathbb{Z} を加法についての群とみたとき、 $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$ は \mathbb{Z} の部分群であることを示せ。
- (3) n を自然数とする。 \mathbb{Z} を加法についての群とみたとき、 $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$ は \mathbb{Z} の部分群であることを示せ。
- (4) \mathbb{Z} を加法についての群とみたとき、 \mathbb{Z} の部分群はすべて問 (3) の形であることを示せ。
- (5) G を群とし、 $a \in G$ とする。 a の位数が 10 のとき、 問 (1) の群 H の全ての部分群をかけ。
- (6) a の位数は 100 として、 問 (5) と同じ問題を考えよ。
- (7) a の位数は n (任意の自然数) として、 問 (5) と同じ問題を考えよ。
- (8) H_1, H_2 を 群 G の 2 つの部分群とする。 このとき、 $H_1 \cap H_2$ も G の部分群であることを示せ。 $H_1 \cup H_2$ はどうか？
- (9) 任意の i に対して、 H_i を G の部分群とする。 このとき $\bigcap_i H_i = H_1 \cap H_2 \cap \dots$ も G の部分群であることを示せ。
- (10) 対称群 S_n の偶置換の全体を H とする。 H は S_n の部分群か？ 奇置換の全体はどうか？
- (11) 3 次対称群 S_3 の全ての部分群をかけ。
- (12) \mathbb{R}^\times の全ての有限部分群をかけ。
- (13) $\mathbb{C}^\times = \{c \in \mathbb{C} \mid c \neq 0\}$ の全ての有限部分群をかけ。