

数学演習 II 補充問題シート 1 (2009年5月11日)

G を群とする。 G の元 x に対し、 $x^k = e$ (=単位元) となるような自然数 k があるとき、そのようなもののうち最小の自然数 n を、 x の位数 (order) という。上 r のような k が存在しないとき、 x の位数は ∞ であるという。位数に関する次の問いに答えよ。

- (1) 単位元の位数 = ?
- (2) 対称群 S_n の互換 (ij) の位数 = ?
- (3) 対称群 S_n の巡回置換 (i_1, i_2, \dots, i_k) の位数 = ?
- (4) 対称群 S_n の巡回置換 a, b が互いに素、つまり共通の文字 (数字) を含まない、とする。
(例: $a = (1, 2), b = (345)$) このとき、積 ab の位数の計算法は?。(ヒント: $ab = ba$ となる。) 互いに素な3個の巡回置換 a, b, c の積 abc の位数の計算法は?
- (5) 対称群 S_n の元を、互いに素な巡回置換の積にかく方法は既に学んだ。それを用いて、 S_n の元の位数を計算する方法を与えよ。
- (6) 群 G の元 x の位数が ∞ のとき、 x^2 の位数 = ? 一般に、 x^k の位数 = ? ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$)
- (7) 群 G の元 x の位数が ∞ のとき、 $x^m \neq x^n$ ($m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$) であることを示せ。
- (8) 群 G の元 a の位数が 100 のとき、 a^{80} の位数 = ?
- (9) 群 G の元 b の位数が 160 のとき、 b^{100} の位数 = ?
- (10) 一般に、群 G の元 a の位数が $n \neq \infty$ のとき、 x^k ($k \in \mathbb{Z}$) の位数を計算する方法は?
- (11) 群 G の元 a の位数が $n \neq \infty$ とする。 $k, l \in \mathbb{Z}$ とする。 $x^k = x^l$ となるのはどのようなときか?