1. ユークリッドの互除法を用いて, 391 と 552 の最大公約数 d を求めよ. また, $391a + 552b = d$ となる整数 a, b の組をひとつ求めよ.
2. a, b を問 1 のようにとったとき, 方程式 $391x + 552y = d$ のすべての整数解 (x, y) は

$$x = a + \frac{552}{d}t, \ \ y = b - \frac{391}{d}t \quad (t \in \mathbb{Z})$$

で与えられることを示せ.
3. I を可換環 R のイデアルとするとき, I が満たすべき条件（つまり, イデアルの定義）をかけ.
4. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ を可換環 R の元とし

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \{r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ka_k \mid r_1, r_2, \ldots, r_k \in R\}$$

とおくとき, $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ は R のイデアルであることを証明せよ.
5. 問 4 において $R = \mathbb{Z}$ とし, d は問 1 の通りとする. $(391, 552) = (d)$ であることを証明せよ. また, n を整数とするとき, 方程式 $391x + 552y = n$ が整数解 (x, y) をもつために n が満たすべき必要十分条件は何か？
6. m を整数とする. 方程式 $408x + 255y + 340z = m$ が整数解 (x, y, z) をもつために, m が満たすべき必要十分条件は何か？
7. 「整数全体のなす環 $\mathbb{Z}$ の任意のイデアル I は単項イデアル」であることを次の順序で証明せよ.
   (1) $I = \{0\}$ のとき, I は単項イデアルである.
   (2) $I \neq \{0\}$ のとき, $\{|x| \mid x \in I, x \neq 0\}$ の最小値を d とすると
     (2a) $I \supset (d)$ が成り立つ.
     (2b) $I \subset (d)$ が成り立つ. よって, (2a) と合わせて $I = (d)$ となる.
8. 「任意のイデアルが単項イデアル」という性質をもつ環の例を $\mathbb{Z}$ 以外にひとつあげ, その事実の証明の概略を示せ. （問 7 を解いた場合, 問 7 の解答と同様の箇所については適当に省略してよい. ）
9. p を素数とする. 剰余類環 $\mathbb{Z}/(p)$ は体であることを証明せよ.
10. 剰余類環 $\mathbb{Z}/(113)$ における $\bar{5}$ の逆元を求めよ. （検算もすること. ）
11. 整域ではないような可換環の例をあげ, それが整域でないことを示せ.
12. $K[x]$ を体 K の元を係数とするような多項式環とする. $f \in K[x] \setminus K$ が素元なら既約元でもあり, 逆に $f \in K[x] \setminus K$ が既約元なら素元でもあることを示せ.