代数学 II 中間テスト

試験時間 80 分, 持ち込みなし. 満点 120 点.

質問には一切答えない. 各自で判断して解答せよ. （疑問点を答案にかいてもよい.）

1. ユークリッドの互除法を用いて, 221 と 391 の最大公約数 d を求めよ. また, $221a + 391b = d$ となるような整数 a, b の組をひとつ求めよ. また, このような a, b の組は無限に多くあることを示せ. (計算の経過も省略することなく書き答案として提出すること. 計算経過が読み取れないときは減点または 0 点となる.) (20 点)
2. ユークリッドの互除法を用いて, $(x^3 - x - 1)f(x) + (2x^2 + 2x - 1)g(x) = 1$ となるような実数係数の多項式 $f(x), g(x)$ の組をひとつ求めよ. 式の整理はしなくてよい. (計算の経過も省略することなく書き答案として提出すること. 計算経過が読み取れないときは減点または 0 点となる.) (15 点)
3. **環** の定義を述べよ.（乗法は可換とする.）環のうち, どのような条件を満たすものを, **体** というかをかけ. 同様に, **整域** についてもかけ. （この問題については細かい条件が抜けていても要点が理解できていれば正解とする. 後半については「環」と「体」,「環」と「整域」の違いのみをかけばよい. ）(10 点)
4. 整域 R の元 r が **可逆元**（または正則元、単元ともいう）であるとは, $rs = 1$ となる $s \in R$ が存在することである. R の可逆元の全体を $R^\times$ とかく. $\mathbb{Z}$ を整数環とするとき, $\mathbb{Z}^\times$ は何か？また, $K[x]$ を体 K 上の 1 変数多項式環とするとき, $K[x]^\times$ は何か？（この問題については, 証明はいらない. 答えだけでよい. ）(5 点)
5. 整域 R の可逆元でなく, 0 でもない元 a が **既約元** であるとは, a がどのような条件を満たすことか. 同様に, a が **素元** であるとはどのようなことか. それぞれの条件 (定義）をかけ. (10 点)
6. 整域 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{s + t\sqrt{-5} \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$ において, 2 が既約元であることを示せ. また, 2 が素元ではないことを示せ. (10 点)
7. 任意の整域 R の可逆元でなく 0 でもない元 a について, a が素元なら既約元でもあることを示せ. (15 点)
8. 体 K 上の多項式環 $K[x]$ の可逆元でなく 0 でもない元 f について, f が既約元なら素元でもあることを示せ. (15 点)
9. 問 7, 問 8 の結果を用いて, 体 K 上の多項式環 $K[x]$ の可逆元でなく 0 でもない元 f は既約元の積として, (積の順序と定数倍を除いて）ただ一通りにかけることを示せ. （証明の詳細までは書かなくてよい. どこまで書くかは自分で判断すること. ）(20 点)