代数学 II 中間試験問題 (2011/11/10)

解答用紙は 2 枚（追加なし、裏面使用ＯＫ、問題番号を明記すれば解答の順序は自由）
どちらの解答用紙にも番号と氏名を必ず書くこと

1. R と S は可換環とする．次の問いに答えよ． ((i) のみ 5 点, 他 10 点, 計 45 点)

   (i) 写像 $\varphi\colon R \longrightarrow S$ が準同型写像であるための条件（定義）をかけ．

   (ii) $\varphi\colon R \longrightarrow S$ が準同型写像であるとき, $\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(r) \mid r \in R\}$ は環であることを示せ．ただし, 環の条件をすべてチェックする必要はない．$\mathrm{Im}\ \varphi$ の 2 元の和が $\mathrm{Im}\ \varphi$ に含まれ, 2 元の積についても同様であることと, $\mathrm{Im}\ \varphi$ が零元と単位元を含むことだけを示せば十分である．

   (iii) R の部分集合 I がイデアルであるための条件（定義）をかけ．また $\varphi\colon R \longrightarrow S$ が準同型写像であるとき, $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\}$ が R のイデアルであることを証明せよ．

   (iv) 準同型写像 $\varphi\colon R \longrightarrow S$ が単射（つまり, 1 対 1）であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{0\}$ であることを証明せよ．

   (v) $R = \mathbb{Q}[x]$ (有理数係数の 1 変数多項式全体), $S = \mathbb{C}$（複素数全体）とする．(R と S が環であることは証明なしで認めてよい.) $\alpha \in \mathbb{C}$ を 1 つ決めておいて, 写像 $\varphi\colon \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ を

   $$\varphi(f(x)) = f(\alpha), \quad f(x) \in \mathbb{Q}[x]$$

   で定義する．φ が準同型写像であることを示せ．

2. $I = (x^2+x+1)\mathbb{Q}[x] = \{(x^2+x+1)f(x) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ とおく．次の問いに答えよ． ((i) のみ 5 点, 他 10 点, 計 45 点)

   (i) I は有理数係数の多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ のイデアルであることを示せ．

   (ii) 剰余環 $\mathbb{Q}[x]/I$ の任意の元は $\overline{ax+b}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ と書けることを示せ．

   (iii) ((ii) の続き) $\overline{ax+b} = \overline{cx+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$ なら $a = c,\ b = d$ であることを示せ．

   (iv) ((ii) の続き) $\overline{(x-2)}\ \overline{(2x+1)} + \overline{x+3}$ を計算せよ．

   (v) 環の準同型写像 $\psi\colon \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ で $\mathrm{Ker}\ \psi = I$ となるようなものを 1 つ作れ．
   (ある $\beta \in \mathbb{C}$ に対して, $\psi(f(x)) = f(\beta)$ とおくことによって ψ を定義すれば, 条件を満たす ψ を作ることができる．β として何を選べばよいか？）

3. 準同型写像 $\mu\colon \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mu(f(x)) = f(i+1)$ $(f(x) \in \mathbb{Q}[x])$ で定義する．$\mathrm{Ker}\ \mu$ を求めよ．また $\mathrm{Im}\ \mu = \{si+t \mid s, t \in \mathbb{Q}\}$ であることを証明せよ． (10 点)