「代数学 II」中間テスト (2010 年 11 月 12 日）

計算や論証の経過もできるだけ省略せずに書くこと。必要な計算や論証が読み取れない場合は減点または 0 点となる。満点は 110 点。

1. 1961 と 2173 の最大公約数を d とする. 次の問いに答えよ.　（10 点× 3）
   (a) ユークリッドの互除法を用いて d を求めよ.
   (b) ユークリッドの互除法を用いて, 方程式　$1961x + 2173y = d$ の 1 つの整数解を求めよ. (a) と (b) は同時に解いてもよい.
   (c) 方程式 $1961x + 2173y = 11d$ のすべての整数解を求めよ.
2. 集合 S は 2 個以上の元をもつとする. S の部分集合の全体を R とする. $A, B \in R$ に対して
   $$A + B = A \cup B - A \cap B, \quad A \cdot B = A \cap B$$
   によって, 加法と乗法を定義するとき, R は環になる. (このことは証明しなくてよい.) 次の問いに答えよ. （10 点× 2）
   (a) この環の零元は何か？乗法の単位元は何か？ (答えだけでなく, それらが零元, 単位元になる理由もかくこと. ）
   (b) $T \subset S$ とし, T の部分集合の全体を I とする. I が R のイデアルであることを証明せよ.
3. 剰余環 $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{19}\}$ について次の問いに答えよ. （10 点× 5）
   (a) $\bar{7} + \bar{15}, \ \bar{7} \cdot \bar{15}, \ -\bar{15}$ をそれぞれ計算せよ.
   (b) $\bar{7}$ の（乗法に関する）逆元は存在するか？存在する場合は逆元を計算し, 存在しない場合は存在しないと判断する理由をかけ.
   (c) $\bar{15}$ の逆元は存在するか？存在する場合は逆元を計算し, 存在しない場合は存在しないと判断する理由をかけ.
   (d) 環 $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ の可逆元をすべてかけ. この問題については証明はしなくてよい.
   (e) 環 $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ は整域か？整域の場合には証明をかき, そうでない場合には整域の条件を満たさないことを反例によって示せ.
4. 環の可逆元は零因子ではないことを証明せよ. また, 体は整域であることを証明せよ. (10 点)