代数学 II 演習問題

1. 次の集合に指定された演算を考えたものは環か？環の場合は単位元と零元を答えよ。環でない場合は理由を答えよ。環の定義は授業で与えた通りとする。また, $\mathbb{Z}$ は整数環を表す。
   (i) $\mathbb{Z}_{\geqq 0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geqq 0\}$, 通常の演算
   (ii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, 演算は $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$
   (iii) $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, 通常の演算

2. 環 R の 0 以外の元 a が逆元 a^{-1}, つまり a との積が 1 になるような R の元, を持つとき, 環 R は体であるという。次の環は体か？体のときは指定された元の逆元を求めよ.
   (i) $\mathbb{Z},\ 5$
   (ii) $\mathbb{Q} = \{a \mid a$ は有理数 $\},\ 3$
   (iii) $\mathbb{C} = \{c \mid c$ は複素数 $\},\ 2 + 3i$　　ただし $i = \sqrt{-1}$
   (iv) $\mathbb{Q}[x] = \{f(x) \mid f(x)$ は $\mathbb{Q}$ の元を係数とする 1 変数多項式 $\},\ x + 1$
   (v) $\mathbb{Q}[i] = \{f(i) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\},\ g(i)$　　ただし $g(x) = x^2 + 2x + 2,$
   (vi) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{f(\sqrt{5}) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\},\ g(\sqrt{5})$　　ただし $g(x) = x^2 + 2x + 2$
   (vii) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{f(\sqrt[3]{2}) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\},\ g(\sqrt[3]{2})$　　ただし $g(x) = x^2 + 2x + 2$

3. 次の割り算の商と余りを求めよ。
   (i) $\mathbb{Z}$ において　$32 \div 13,\ (-32) \div 13,\ 32 \div (-13),\ (-32) \div (-13)$
   (ii) $\mathbb{Q}[x]$ において　$(x^2 + 1) \div (2x + 1),\ (-x^2 - 1) \div (2x + 1)$
   (iii) $\mathbb{Q}[x]$ において　$(x^3 - 2) \div (x^2 + 2x + 2)$
   (iv) $\mathbb{Q}[x]$ において　$(3x^4 + 5x + 2) \div (2x^3 + x^2 + 5)$

4. 0 でない 2 つの整数 a, b の公約数が 1 と -1 だけのとき, a と b は互いに素であるという。a と b の最大公約数が 1 というのと同じことである。次の 2 つの整数は互いに素であることを証明せよ。
   (i) $n,\ n + 1$　　ただし n は自然数
   (ii) $n,\ n + 2$　　ただし n は奇数
   (iii) 2172983, 2172973

5. 次の 2 つの整数の最大公約数を求めよ。
   (i) 3053, 2537
   (ii) 31899744, 44216928

代数学 II 演習問題

6. 次は正しいか？正しくなければその理由を述べよ。正しければ証明せよ。
(i) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Q}$ のイデアルである。
(ii) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f(x) \geqq 1\}$ は $\mathbb{Q}[x]$ のイデアルである。
(iii) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = 0\}$ は $\mathbb{Q}[x]$ のイデアルである。
(iv) $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(1) = 1\}$ は $\mathbb{Q}[x]$ のイデアルである。
(v) $I,\ J$ が環 R のイデアルのとき $I \cap J$ は R のイデアルである。
(vI) $I,\ J$ が環 R のイデアルのとき $I + J = \{i + j \mid i \in I,\ j \in J\}$ は R のイデアルである。

7. $a, b \in \mathbb{Z}$ とする。次の問いに答えよ。
(i) p を素数として, 剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考える。$\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ のとき, $\bar{a} = \bar{0}$ または $\bar{b} = \bar{0}$ であることを証明せよ。
(ii) 正の整数 n が素数でないとき, 剰余環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ において, $\bar{a} \neq \bar{0}$ かつ $\bar{b} \neq \bar{0}$ であっても $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ となることがある。これを示せ。

8. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2}) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ と定義する。$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$ であることを証明せよ。

9. $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Q}$ とする。$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Longrightarrow a = c,\ b = d$ を示せ。

10. $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)\mathbb{Q}[x] = \{\overline{a + bx} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\}$ を示せ。

11. （10 の続き）$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Q}$ とする。$\overline{a + bx} = \overline{c + dx} \Longrightarrow a = c,\ b = d$ を示せ。$(\overline{x + 2})(\overline{2x - 3})$ を計算せよ。

12. $\varphi \colon \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$ を $\varphi(f(x)) = f(i)$ で定義する $\mathrm{Ker}\,\varphi$ を求めよ。

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$\psi \colon \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[A]$ を $\psi(f(x)) = f(A)$ で定義する $\mathrm{Ker}\,\psi$ を求めよ。

14. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{f(\sqrt[3]{2}) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ と定義する。$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}\}$ であることを証明せよ。

15. $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{Q}$ とする。$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 = d + e\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{2}^2 \Longrightarrow a = d,\ b = e,\ c = f$ を示せ。

16. $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)\mathbb{Q}[x] = \{\overline{a + bx + cx^2} \mid a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}\}$ を示せ。

17. (16 の続き）$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{Q}$ とする。$\overline{a + bx + cx^2} = \overline{d + ex + fx^2} \Longrightarrow a = d,\ b = e,\ c = f$ を示せ。$(\overline{x^2 + 2x + 2})(\overline{2x^2 - 3x + 4})$ を計算せよ。

代数学 II 演習問題

18. 環としての同型写像 $\tau\colon \mathbb{Q}[x]/(x^2-2)\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ を定義せよ。$\tau(\overline{x^3+1})$ を計算せよ。

19. (18 の続き) $\tau(\overline{f_1(x)}) = \sqrt{2}$, $\tau(\overline{f_2(x)}) = \sqrt{2}+1$, $\tau(\overline{f_3(x)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \in \mathbb{Q}[x]$ をそれぞれ 1 つずつ求めよ。

20. 環としての同型写像 $\sigma\colon \mathbb{Q}[x]/(x^2+1)\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$ を定義せよ。$\sigma(\overline{x^3+2x^2-1})$ を計算せよ。

21. (20 の続き) $\sigma(\overline{g_1(x)}) = i$, $\tau(\overline{g_2(x)}) = i-2$, $\tau(\overline{g_3(x)}) = \frac{1}{i+1}$ となる $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x) \in \mathbb{Q}[x]$ をそれぞれ 1 つずつ求めよ。

22. 環としての同型写像 $\mu\colon \mathbb{Q}[x]/(x^3-2)\mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ を定義せよ。また, $\mathbb{Q}[x]/(x^3-1)\mathbb{Q}[x] \cong \mathbb{Q}[\omega]$ は成り立たないことを示せ。ただし, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。($\omega^3 = 1$ である。)

23. (22 の続き) $\mu(\overline{x^4+x^3+x^2+1})$ を求めよ。また, $\mu(\overline{h_1(x)}) = \sqrt[3]{2}$, $\mu(\overline{h_2(x)}) = \sqrt[3]{2}^2 + 3\sqrt[3]{2}$, $\mu(\overline{h_3(x)}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ となる $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x) \in \mathbb{Q}[x]$ をそれぞれ 1 つずつ求めよ。

24. (22 の続き) $\mu(\overline{k(x)}) = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}^2+2\sqrt[3]{2}+1}$ となる $k(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を求めよ。

25. 環としての同型写像 $\theta\colon \mathbb{Q}[i] \longrightarrow \mathbb{Q}[A]$ を定義せよ。ただし, A は 13 の行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

26. 写像 $\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ を

$$\varphi(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}, \quad a,\ b \in \mathbb{Q}$$

で定義する。φ が環の同型写像であることを証明せよ。

27. ω は 18 の通りとする。写像 $\varphi\colon \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}\omega]$ を

$$\varphi(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{2}^2) = a+b\sqrt[3]{2}\omega+c\sqrt[3]{2}^2\omega^2, \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}$$

で定義する。φ が環の同型写像であることを証明せよ。

28. $\alpha \in \mathbb{C}$ を決めておく。写像 $\varphi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\varphi(f(x)) = f(\alpha)$ $(f(x) \in \mathbb{Q}[x])$ で定義する。$Ker\ \varphi = h(x)\mathbb{Q}[x]$ となる $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ は 0 または既約多項式であることを示せ。

29. I を $\mathbb{Z}$ のイデアルとする。$I \neq \{0\}$ のとき, $a \neq 0$ である I の元のうち絶対値が最小のものを a とする。このとき $I = a\mathbb{Z}$ であることを示せ。

30. 剰余環 $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ において $-\overline{7}$ を求めよ。また $\overline{15}$ の(乗法に関する)逆元は存在しないことを示せ。

代数学 II 演習問題

31. 剰余環 $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ において $\bar{3}$, $\overline{13}$ の（乗法に関する）逆元を計算せよ。

32. 環 R が**整域**であるとは $a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$ なら $ab \neq 0$ であることである。体は整域であることを証明せよ。また、体ではない整域の例を 2 つあげよ。

33. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が 2 次以上で既約ではないとする。このとき剰余環 $\mathbb{Q}[x]/f(x)\mathbb{Q}[x]$ は整域ではないことを証明せよ。

34. p は素数とする。剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体であることを証明せよ。

35. $\varphi\colon R \longrightarrow S$ は環の同型写像とする。このとき $\varphi^{-1}\colon S \longrightarrow R$ は環の同型写像であることを証明せよ。φ^{-1} が全単射であることは証明しなくてよい。

36. $\varphi_1\colon R_1 \longrightarrow R_2$ と $R_2 \longrightarrow R_3$ はどちらも環の準同型写像とする。このとき $\varphi_2 \circ \varphi_1\colon R_1 \longrightarrow R_3$ は環の準同型写像であることを証明せよ。

37. $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ とする。6 次式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ で $f(\alpha) = 0$ となるものを 1 つ見つけよ。また、その結果を用いて $\frac{1}{\alpha}$ を有理化せよ。

38. 問題 37 の結果を用いて $\frac{1}{\alpha^2+1}$ を有理化せよ

復習問題

1. イデアルの定義を述べよ。

2. 環の準同型写像の定義を述べよ。

3. 環の準同型写像 $\varphi\colon R \longrightarrow S$ に対し $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は R のイデアルであることを証明せよ。

4. $\mathbb{Q}[x]$ のイデアルはすべて $f(x)\mathbb{Q}[x]$ の形（ただし $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$）であることを証明せよ。

5. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が既約のとき $\mathbb{Q}[x]/f(x)\mathbb{Q}[x]$ は体であることを証明せよ。