代数学 I 補充テキスト１（２００９年５月, 全６ページ）

1　群の集合への作用

G を群, S を空でない集合とする. G が S に**作用する** (G acts on S) とは, 任意の $g \in G$ と任意の $s \in S$ に対し, $g \cdot s \in S$ を定めるルールが与えられていて, そのルールが次の２条件を満たすことである.

(1) 任意の $s \in S$ に対して $e \cdot s = s$ （e は G の単位元).
(2) 任意の $g, h \in G$ と任意の $s \in S$ に対して $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$.

注意 $g{\cdot}s$ を, 単に gs と（積であるかのように）かくことも多い. このとき, $g,\ h \in G,\ s \in S$ に対し, $(gh)s = g(hs)$ のことを, （括弧を省略して）単に ghs とかいてよい.

命題 1 群 G が集合 S に作用しているとき, 任意の $g \in G$ に対し, S から S への写像 $s \longrightarrow gs \quad (s \in S)$ は, 全単射（一対一かつ上への写像）である.
証明 S の任意の元 t に対し, $s = g^{-1}t$ とおくと, $gs = g(g^{-1}t) = et = t$ となる. よって, 全射性が示せた. また, $s_1,\ s_2 \in S$ に対して, $gs_1 = gs_2$ が成り立つなら, $g^{-1}(gs_1) = g^{-1}(gs_2)$ より, $s_1 = s_2$ となって, 単射性が示せた.

群 G が集合 S に作用しているとき, $s \in S$ に対し

$$Gs = \{\, gs \mid g \in G \,\}$$

とおき, この集合 $Gs (\subset S)$ を s を通る G **軌道**（G-orbit）という.

定理 1 群 G が集合 S に作用しているとする. $s, t \in S$ とする.

(i) $Gs \cap Gt \neq \emptyset$ のとき, $Gs = Gt$ である. すなわち、２つの G 軌道は完全に一致するか、または共通元をもたないか、のどちらかである.
(ii) $Gs = Gt$ であるための必要十分条件は $t \in Gs$ となることである.

証明 (i) $Gs \cap Gt \neq \emptyset$ とすると $a \in Gs \cap Gt$ をとることができる. このとき, $a = gs$, $a = ht$ となる $g,\ h \in G$ が存在する. $gs = ht$ であるから $s = g^{-1}ht$ となる. よって $Gs = \{xg^{-1}ht \mid x \in G\} \subset Gt$, 同様にして $Gt \subset Gs$ となるので $Gs = Gt$ が得られる.

(ii) $Gs = Gt$ のとき, $t \in Gt = Gs$ より $t \in Gs$ となる．逆に, $t \in Gs$ のとき $t \in Gt$ でもあるから $t \in Gs \cap Gt$, つまり $Gs \cap Gt \neq \emptyset$ である．よって, (i) より $Gs = Gt$ である．

群 G が集合 S に作用しているとし, 相異なる G 軌道の全体を $\{O_i \mid i \in I\}$ とする．（I は有限集合のこともあるし, 無限集合のこともある．）S の任意の元 s はある G 軌道（すなわち Gs) に含まれるから, 上の定理により

$$S = \bigsqcup_{i \in I} O_i \tag{1}$$

となる．ただし $\bigsqcup$ は disjoint な（すなわち、どの 2 個も互いに交わらない）合併を表す記号である．(1) を S の G **軌道分解** (G-orbit decomposition）という．S の G 軌道全体からなる集合のことを $S/\sim_G$ または $S/\sim$ で表す．つまり

$$S/\sim = \{O_i \mid i \in I\}$$

である．

注意 $S/\sim$ を G 軌道の合併と混同してはならない．$S/\sim$ は, ひとつひとつの G 軌道を元とする集合である．G 軌道自身が集合でもあるので, 「集合を元と考える」ことになり, 難しく感じる人もいるようだ．そういう人は「ひとりの人間」自体が「たくさんの細胞」の集まりであり, 「ひとつひとつの細胞」が「多くの分子」からできており, さらには「１個の分子」は「多数の原子」から,「１個の原子」すらも「多数の陽子や電子」からできている, ことを思い出して欲しい．この他にも「人類は・・・」とか「ビートルズが・・・」などのように, 集合をまるで一つのモノであるかのようにいうことはゼンゼン珍しくない．要するに「元が集合でもある」というのは難しいことでも何でもなく, ごくフツーの考え方なのであって, それを数学にも持ち込んだところだけが「新しい」のである．

例 1 （群の作用の代表的な例を見ていくことにする.）

1. $G = S_n,\ S = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし, G が S に通常のように作用するとき, 任意の $i \in S$ に対し, $g1 = i$ となる $g \in G$ が存在する（例えば $g = (1, i)$）から, $S = G1$ となり, S 全体がひとつの G 軌道になる．したがって, このとき（１）は

$$S = S$$

という trivial な式になってしまう．また, $S/\sim$ は唯一つの元（すなわち S）からなる．

2. $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$, $S = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ とする．行列としての積により G が S に作用するとき, 行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は原点を中心とする角 θ の回転を表す．よって, 任意の $r \geq 0$ に対し

$$S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r\}(= \text{原点を中心とする半径 r の円周})$$

はひとつの G 軌道となり, $S/\sim = \{S_r \mid r \geq 0\}$ である．よって, 分解（１）は

$$\mathbb{R}^2 = \bigsqcup_{r \geq 0} S_r$$

となる．
(この分解を図示すると、太陽のまわりを回る惑星の軌道のようにも、バウムクーヘンの断面のようにも見える．）

3. G を群, H をその部分群とする．　$h \in H$, $g \in G$ とする．

$$h \cdot g = hg \quad (\text{右辺は群 } G \text{ における積})$$

によって, 群 H は集合 G に作用する．（ちょっとややこしいが, この例では作用する群が H, 作用される集合が G である.）このとき, g を通る H 軌道は $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ となり, G の H 軌道分解は

$$G = \bigsqcup_{i \in I} Hg_i \tag{2}$$

の形になる．Hg を G の H に関する**右剰余類**（right coset）といい, （２）を G の H に関する**右剰余類分解**（right coset decomposition）という．（２）は（１）の特別の場合、ということになる。この場合の $G/\sim$ は右剰余類全体の集合、つまり $\{Hg_i \mid i \in I\}$ であるが, これをとくに $H\backslash G$ で表す．$H\backslash G$ が有限集合のとき, その元の個数 $|H\backslash G| = |I|$ のことを G における H の**指数**（index）という．

4. $G = S_n\,(n \geq 2)$ とし, $H =$(G の隅置換の全体) とすると H は G の部分群である．例 1 の 3 で述べたように, 群 H は集合 G に

$$h \cdot g = hg \quad (\text{右辺は群 } G \text{ における積})$$

によって作用する．このとき, 分解（１）＝右剰余類分解（２）は

$$S_n = \{\,\text{偶置換}\,\} \sqcup \{\,\text{奇置換}\,\} \tag{3}$$

となる．実際, S_n の任意の 元は偶置換または奇置換だから（３）が成り立つ．しかも, $H = He$ だから, $H = \{\,\text{偶置換}\,\}$ は一つの H 軌道（右 H 剰余類）である．また, $H(1,2) \subset \{\,\text{奇置換}\,\}$ であり, 逆に任意の奇置換 x に対し, $x(1,2)$ は偶置換, すなわち $x(1,2) \in H$ だから, $(1,2)$ を右からかけて, $x \in H(1,2)$ となる．よって, $\{\,\text{奇置換}\,\} \subset H(1,2)$. よって、$H(1,2) = \{\,\text{奇置換}\,\}$ が得られ, $\{\,\text{奇置換}\,\}$ も一つの H 軌道（右 H 剰余類）であることがわかる．よって, （３）は S_n の H 軌道分解（右 H 剰余類分解）である．以上のことから, $H\backslash S_n$ は $\{$ 偶置換 $\}$ と $\{$ 奇置換 $\}$ という 2 つの元からなり, H の S_n における位数 $|H\backslash S_n|$ は 2 である．

5. $G = \mathbb{Z}$ (加法による群), $H = 2\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\} =$ (偶数全体) とする．H は G の部分群である．例 1 の 3 で述べたように, 群 H は集合 G に作用する．この

場合は群演算が加法なので, 作用を表す式は

$$h \cdot g = h + g, \qquad h \in H,\, g \in G$$

となる．（左辺の $\cdot$ を省略すると, 見かけ上, ヘンテコな式になるので, この例では $\cdot$ を省略しないことにする．）このとき, $\{$ 偶数 $\}$ は $H \cdot 0 = H + 0$ であり, $\{$ 奇数 $\}$ は $H \cdot 1 = H + 1$ であるから, G の H 軌道分解（G の右 H 剰余類分解）は

$$\mathbb{Z} = \{\text{ 偶数 }\} \sqcup \{\text{ 奇数 }\}$$

となる．$2\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ は $\{$ 偶数 $\}$ と $\{$ 奇数 $\}$ という 2 つの元からなり, $2\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ における指数 $|2\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}|$ は 2 である．

6. 例 1 の 5 の一般化を考えよう．自然数 n を一つ固定する．$G = \mathbb{Z}$ (加法による群), $H = n\mathbb{Z} = \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, \cdots\} =$ (n の倍数全体) とする．H は G の部分群である．例 1 の 3 で述べたように, 群 H は集合 G に作用する．作用を表す式は例 1 の 5 と同じ

$$h \cdot g = h + g, \qquad h \in H,\, g \in G$$

である．$r \in \mathbb{Z}$ に対し, r を通る H 軌道（r を含む右 H 剰余類）は

$$H \cdot r = \{nq + r \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

であるから, この場合の H 軌道分解（右 H 剰余類分解）は

$$\mathbb{Z} = \bigsqcup_{r=0}^{n-1} \{nq + r \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

となる．右辺の $\{nq + r \mid q \in \mathbb{Z}\}$ は n で割ったときの余り（剰余）が r であるような整数の全体である．$n\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}$ は $\{nq + r \mid q \in \mathbb{Z}\}$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ という n 個の元からなり, $n\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ における指数 $|n\mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}|$ は n である．

7. G を群, H をその部分群とする．　$x \in G,\, h \in H$ とする．

$$h \cdot x = xh^{-1} \quad (\text{右辺は群 } G \text{ における逆元 } h^{-1} \text{ と } x \text{ の積})$$

によって, 群 H は集合 G に作用する．（右辺を xh とすると作用の条件 (ii) を満たさない．）このとき, x を通る H 軌道は $xH = \{xh^{-1} \mid h \in H\}$ となり, G の H 軌道分解は

$$G = \bigsqcup_{i \in I} x_i H \tag{4}$$

の形になる．xH を G の H に関する**左剰余類**（left coset）といい,（2）を G の H に関する**左剰余類分解**（left coset decomposition）という．（2）は（1）の特別の場合、ということになる。とくに I が有限集合のとき, I の元の個数 $|I|$ のことを G に

おける H の**指数**（index）という．例５における指数と例７における指数は一致する．(なぜか？ Hint: $(Hg)^{-1} = g^{-1}H$) G が可換群のときは, $Hg = gH$ $(g \in G)$ であるから, 右剰余類と左剰余類は一致する．よって, このとき $H\backslash G$ と G/H も一致し, 右剰余類分解と左剰余類分解も一致する．

次の命題は定理１の特別の場合であり, 教科書にも書かれているが, 念のため述べておく．
命題 2 G は群, H はその部分群とし, $x, y \in G$ とする．

(i) $Hx \cap Hy \neq \emptyset$ なら $Hx = Hy$ である．すなわち、２つの右 H 剰余類は完全に一致するか、または共通元をもたないか、のどちらかである．
(ii) $Hx = Hy$ であるための必要十分条件は $y \in Hx$ となることである．

左剰余類についても, 上の (i)(ii) と同様のことが成り立つ．

命題 3 群 G が集合 S に作用しているとする．$s \in S$ に対し

$$\mathrm{Stab}_G(s) = \{\, g \in G \mid gs = s \,\}$$

とおく．$\mathrm{Stab}_G(s)$ は G の部分群である．
証明 $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(s)$ とする．$(g_1g_2)s = g_1(g_2s) = g_1s = s$ であるから, $g_1g_2 \in \mathrm{Stab}_G(s)$ である．また, $g \in \mathrm{Stab}_G(s)$ とすると, $gs = s$ であるが, この式の両辺の左から g^{-1} を作用させると, $g^{-1}(gs) = g^{-1}s$ となり, 左辺は $es = s$ だから, $g^{-1}s = s$ となり, $g^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(s)$ がわかる．以上から, $\mathrm{Stab}_G(s)$ は G の部分群である．

命題３の部分群 $\mathrm{Stab}_G(s)$ を G における s の**固定化群**（stabilizer）という．
例 2（固定化群の例をあげる．）

1. 例１の１と同じ場合, つまり $G = S_n$, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ のときを考える．$n \in S$ の固定化群は
$$\mathrm{Stab}_{S_n}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n \mid i_n = n \right\}$$
であるから, 実質的に S_{n-1} と同じものである．(後で出てくる用語を使えば, 群 $\mathrm{Stab}_{S_n}(n)$ は群 S_{n-1} と同型である．)

2. 例１の２と同じ場合, つまり $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$, $S = \mathbb{R}^2$ のときを考える．$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^2$ が原点 O と一致しないときは, 固定化群 $\mathrm{Stab}_G(\mathrm{A})$ は trivial, つまり単位元 e (この場合は単位行列) だけからなる．また, $\mathrm{A} = \mathrm{O}$ のときには, 固定化群 $\mathrm{Stab}_G(\mathrm{O})$ は G と一致する．

定理 2 群 G が集合 S に作用しているとする．$s \in S$ を固定し, $H = \mathrm{Stab}_G(s)$ とおく．左剰余類 $gH\,(g \in G)$ に s を通る G 軌道 Gs の元 gs を対応させる写像 $f : G/H \longrightarrow Gs$ は全射である．

証明 先ず, 写像 f が well-defined であること（つまり, f の定義が意味を成していること）を示しておこう．左剰余類 gH を別の G の元 g' を用いて $g'H$ と表すこともできるとき（すなわち, $gH = g'H$ のとき）, $gs = f(gH) = f(g'H) = g's$ であるから $gs = g's$ でなくてはならない．（そうでないと, f の定義が意味を成さないことになる．）この点を確認することを「well-defined であることを示す」といい, ‘同一の元が 2 通り以上の方法で表される集合’ から別の集合への写像を定義するときには必要になる．さて $gH = g'H$ とする．命題 2 (ii) より, $g' \in gH$, つまり $g' = gh$ となる $h \in H = \mathrm{Stab}_G(s)$ がある．よって, $g's = ghs = g(hs) = gs$ となり, $gs = g's$ が示され, f が well-defined であることが分かった．
次に f が単射であることを示そう．そのためには $xs = ys\,(x, y \in G)$ のとき, $xH = yH$ を示せばよい．ところが $xs = ys$ の両辺の左から x^{-1} を作用させると $s = x^{-1}ys$ となり, $x^{-1}y \in \mathrm{Stab}_G(s) = H$ が分かる．よって $y \in xH$ となり, 命題 2 (ii) より $xH = yH$ であることが分かる．最後に f が全射であることを示そう．Gs のどんな元もある $g \in G$ によって gs と書けるが, 一方, f の定義から $f(gH) = gs$ であるから f は全射である．

系 1 定理 2 において G が有限群のときは $|G/H| = |G/\mathrm{Stab}_G(s)| = |Gs|$ となる．つまり $s \in S$ の固定化群 $\mathrm{Stab}_G(s)$ の G における位数は, G 軌道 Gs に含まれる元の個数に等しい．

G が有限群, H がその部分群のとき, $|G/H| = |G|/|H|$ であることは, 教科書にかいてあるし, $G = \bigsqcup_{i=1}^{k} g_i H$ を G の左剰余類分解とするとき, $k = |G/H|$ であることと, $|H| = |g_i H|\ (1 \geq i \geq k)$ であることから分かる．よって系 1 より次のことが従う．

系 2 定理 2 において G が有限群のとき, 次のことが成り立つ:

$$|G|/|\mathrm{Stab}_G(s)| = |Gs|, \quad s \in S.$$