**計算や推論もできる限り省略せずに書くこと．解に至る経過が読み取れない場合は減点または 0 点となる．**

(1) まず, 問 (a) に答えよ．さらに 問 (b)〜問 (i) から５問を選んで答えよ (問 (a) を入れて６問)．ただし $G, H, K$ は群とする．

(a) 写像 $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像であるための条件をかけ．

(b) $f_1\colon G \longrightarrow H,\ f_2\colon H \longrightarrow K$ が準同型写像のとき, 合成写像 $f_2 \circ f_1\colon G \longrightarrow K$ は準同型写像であることを示せ．

(c) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, $f(e_G) = e_H$ ($e_G$, $e_H$ はそれぞれ $G$, $H$ の単位元）であることを示せ．

(d) $f\colon G \longrightarrow H$ が準同型写像のとき, $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ $(g \in G)$ であることを示せ．

(e) 準同型写像 $f\colon G \longrightarrow H$ が１対１, かつ上への写像であるとき同型写像であるという．$f\colon G \longrightarrow H$ が同型写像なら, その逆写像 $f^{-1}\colon H \longrightarrow G$ も同型写像であることを示せ．

(f) $\mathcal{I}m(f) = f(G) = \{f(g) \mid g \in G\}$ とおく．$\mathcal{I}m(f)$ は $H$ の部分群であることを示せ．

(g) $\mathcal{K}er(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ($e_H$ は $H$ の単位元) とおく．$\mathcal{K}er(f)$ は $G$ の正規部分群であることを示せ．

(h) 対称群 $S_n$ $(n \geq 2)$ から群 $\{1, -1\}$ への準同型写像 $f$ を定義し, $\mathcal{K}er(f)$ を求めよ．($f$ が準同型写像であることの証明は必要だが, 細部は適当に省略してよい．)

(i) $f\colon G \longrightarrow H$ が同型写像とし, $g \in G, h \in H$ は $f(g) = h$ を満たすとする．$g$ の位数が有限なら $h$ の位数も有限で, $g$ の位数$=h$ の位数であることを証明せよ．

(2) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を加法についての群と考える．次の問いに答えよ．

(a) $\mathbb{Z}$ の単位元は何か？また $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か？

(b) $n \in \mathbb{Z}$ とし $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$ とおく．$n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示せ．

(c) $n$ を自然数とする．$\mathbb{Z}$ から位数 $n$ の巡回群 $H = \langle a \rangle$ への準同型写像 $f$ を定義し, 準同型定理を適用することにより, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong H$ であることを示せ．($f$ が準同型写像であることの証明は省略せよ．)

(d) $H$ を $\mathbb{Z}$ の部分群とすると, ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $H = n\mathbb{Z}$ であることを示せ．（ヒント：$H \neq \{0\}$ のとき, $H$ に含まれる最小の自然数を $n$ とすると, $H = n\mathbb{Z}$ となることを示せばよい．）

(3) $n$ は自然数とする．0 でない複素数全体の集合 $\mathbb{C}^\times = \{c \in \mathbb{C} \mid c \neq 0\}$ を積に関する群と考える．群 $\mathbb{C}^\times$ の位数 $n$ の部分群は

$$C_n = \{x \in \mathbb{C} \mid x^n = 1\}$$

だけであることを示せ．　（ヒント：まず $C_n$ が位数 $n$ の $\mathbb{C}^\times$ の部分群であることを示す．次に, $H$ を位数 $n$ の $\mathbb{C}^\times$ の部分群とするとき, ラグランジュの定理から $H \subset C_n$ となることを示す．）

(4) 剰余類に関係して, well-defined か？という問題が生じることがある．そのような状況をひとつあげ, その場合に well-defined であることを証明せよ．