代数学 I 中間試験問題 (2009 年 6 月 19 日) [115 点満点]

計算や推論もできる限り省略せずに書くこと．解に至る経過が読み取れない場合は減点または 0 点となる．

(1) 対称群 S_n についての次の問いに答えよ．(計 15 点)

(a) 次の積を計算せよ．ただし，解は 2 行表示 (つまり $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ の形の表示) でかけ．(5 点)

$(6\,3\,1\,4)(2\,3\,5\,6)\ \ (n=6)$

(b) 次の置換の逆元（逆置換）を求めよ．解は，上の (a) と同じように，2 行表示でかけ．(5 点)

$(1\,4\,3)(2\,4\,3\,5)\ \ (n=5)$

(c) 次の置換の符号を求めよ．(5 点)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}\ \ (n=7)$

(2) 群 G の元の位数 (order) についての次の問いに答えよ．(計 25 点)

(a) G の元 a の位数が n（自然数), あるいは ∞ であるとは，どういう意味か？ 定義をかけ．(答えだけでよい．5 点)

(b) G の元 a の位数が n（自然数）のとき，$a^k = a^l$（k, l は自然数）となるのは k, l がどのような条件を満たしているときか？必要十分条件を求めよ．(10 点)

(c) G の元 a の位数が n（自然数）のとき，a^2 の位数を求めよ．また，自然数 k に対し a^k の位数を求めよ．(10 点)

(3) 群の部分群 (subgroup) についての次の問いに答えよ．(計 25 点)

(a) G の部分集合 H が G の部分群であるための条件をかけ．(答えだけでよい．5 点)

(b) H_1, H_2 が G の部分群であるとき，$H_1 \cap H_2$ も G の部分群であることを，証明せよ．(10 点)

(c) G の元 a の位数が n（自然数）のとき，$H = \{a^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ は G の部分群であることを証明せよ．ただし $a^0 = e$ （単位元）とする．(10 点)

(4) 対称群 S_n についての次の問いに答えよ．(計 50 点)

(a) 対称群 S_6 の元 $(1\,2\,4\,3)(3\,5\,6)$ の位数を求めよ．(イジワル問題) (10 点)

(b) 対称群 S_n の偶置換の全体を H, 奇置換の全体を K とする．H は S_n の部分群か？ K はどうか？ (10 点)

(c) 対称群 S_3 の部分群のうち，$\{e\}$ と S_3 以外のものをすべて求めよ．(15 点)

(d) 対称群 S_4 の部分群のうち，位数（元の個数）が 4 のものと 5 のものをすべて求めよ．(15 点)