佐藤のゲーム
とその仲間たち
（完全可解ゲームの話）

関西学院大学　川中 宣明

数理科学研究センター談話会

２０１１年６月２９日

予　　定

Sato の ゲーム

Sato の ゲームの ２進展開

⇒　可解性

Kleinの4元群 による展開

⇒　完全可解性

一般化など

Sato のゲーム　の誕生

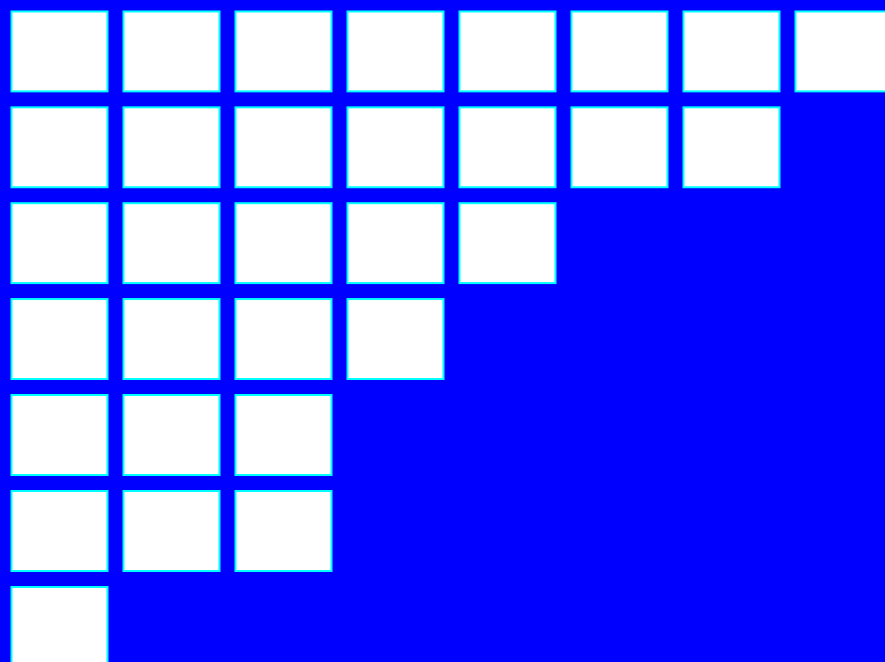
対称群 S_n の標数0での既約表現

Frobenius,　Young
（1900年頃）

箱の数 n のヤング図形

中山 正 の論文 (1941):
問題:　p を法として考えると？

ヤング図形



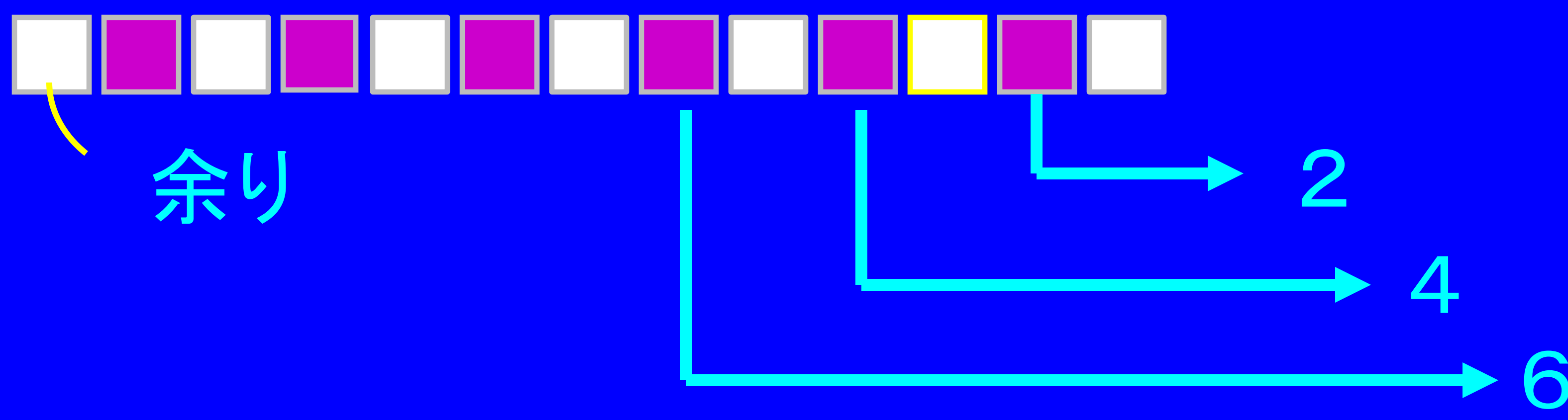
S_n の既約表現 mod p

≒　ヤング図形 mod p

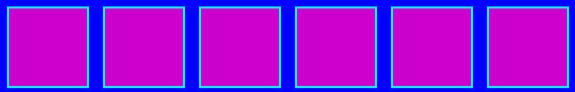
p で割った余り

ヤング図形の割り算を考えればよい！

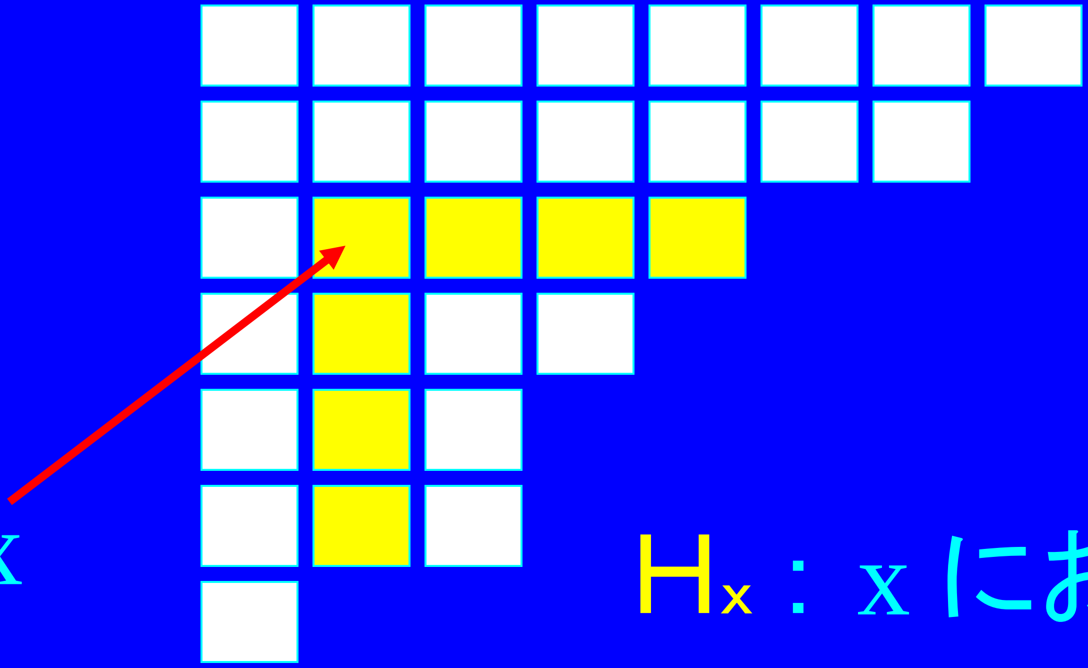
自然数÷2



2または2の倍数を次々と
引いていく。残ったハコが余り

引き方のパターンが商 

ヤング図形は自然数の一般化

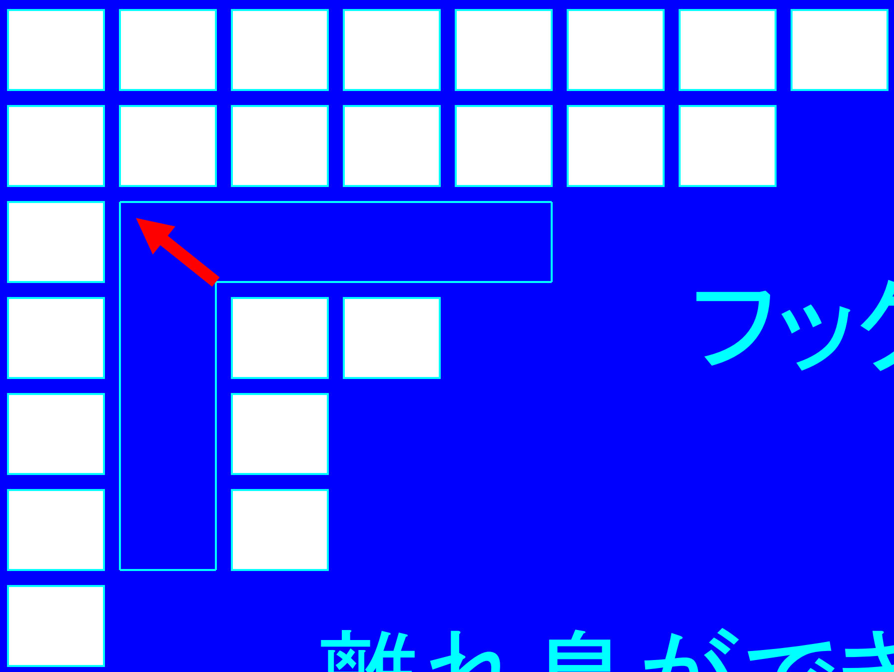


箱 x

H_x : x におけるフック

H_x の長さ ＝ 7

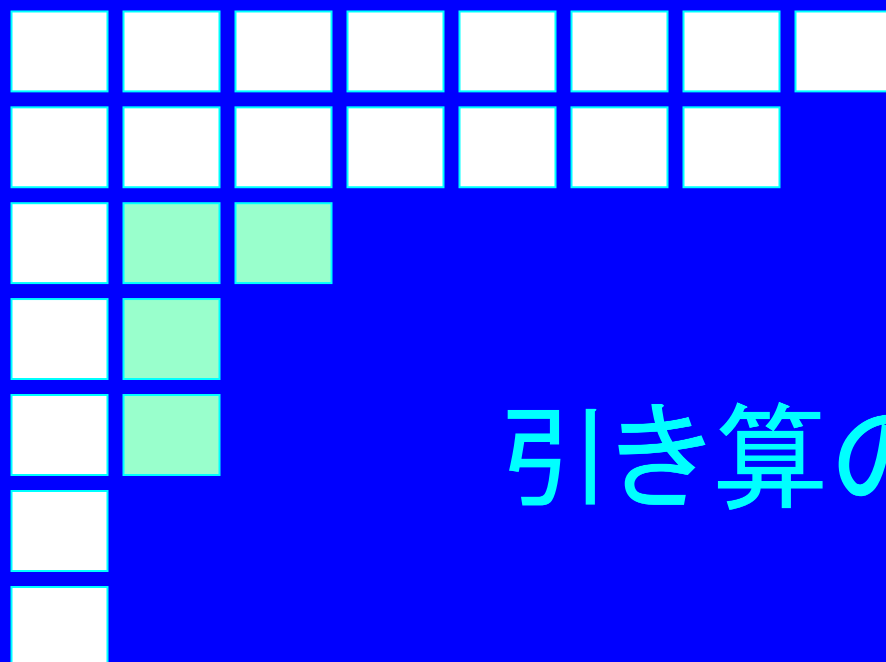
ヤング図形での引き算



フックを 引く

離れ島ができるときは
左上に詰めておく

離れ島をくっつける



引き算の完成！

佐藤幹夫のゲーム

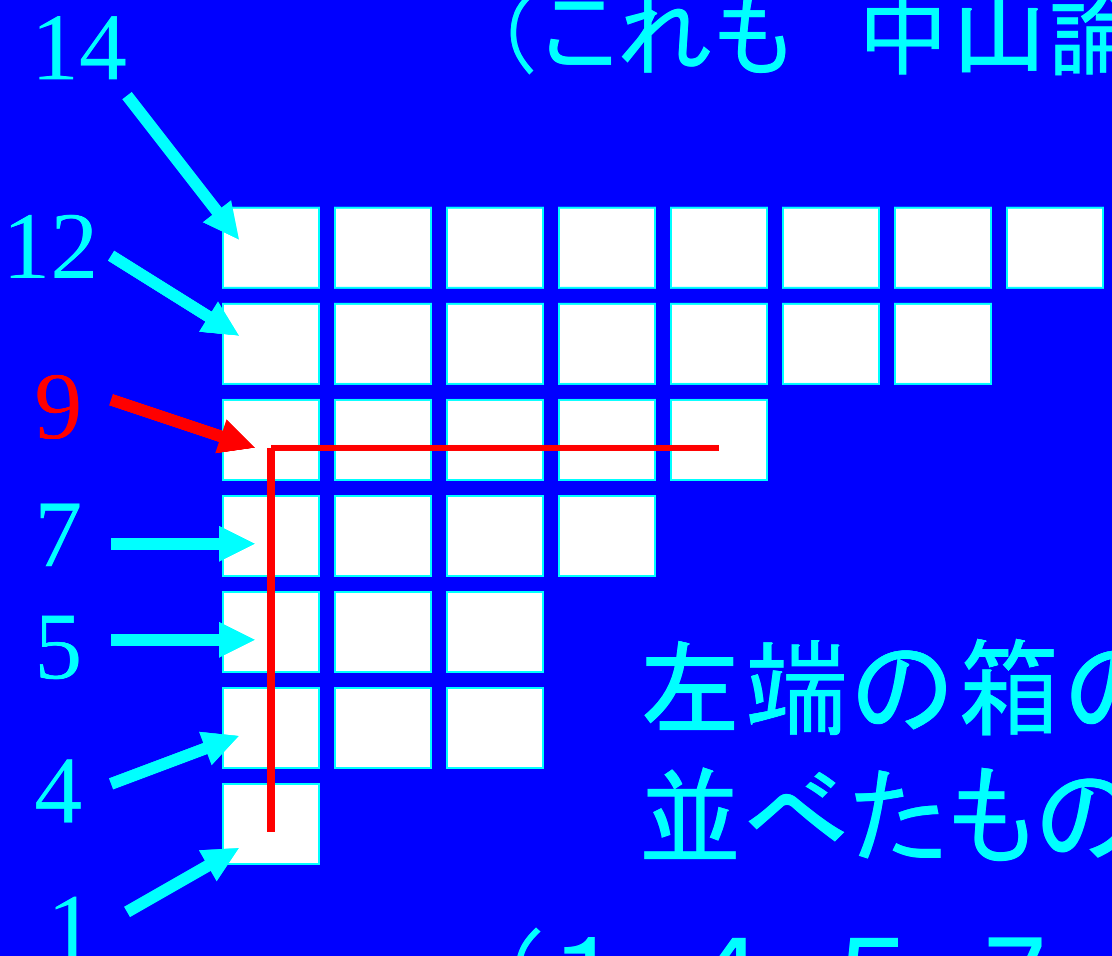
２人のプレイヤーが
交互に、フックを選んで
引いていく

空なヤング図形にした方が勝ち

別の見方

ヤング図形の β 数表示

（これも 中山論文にある）

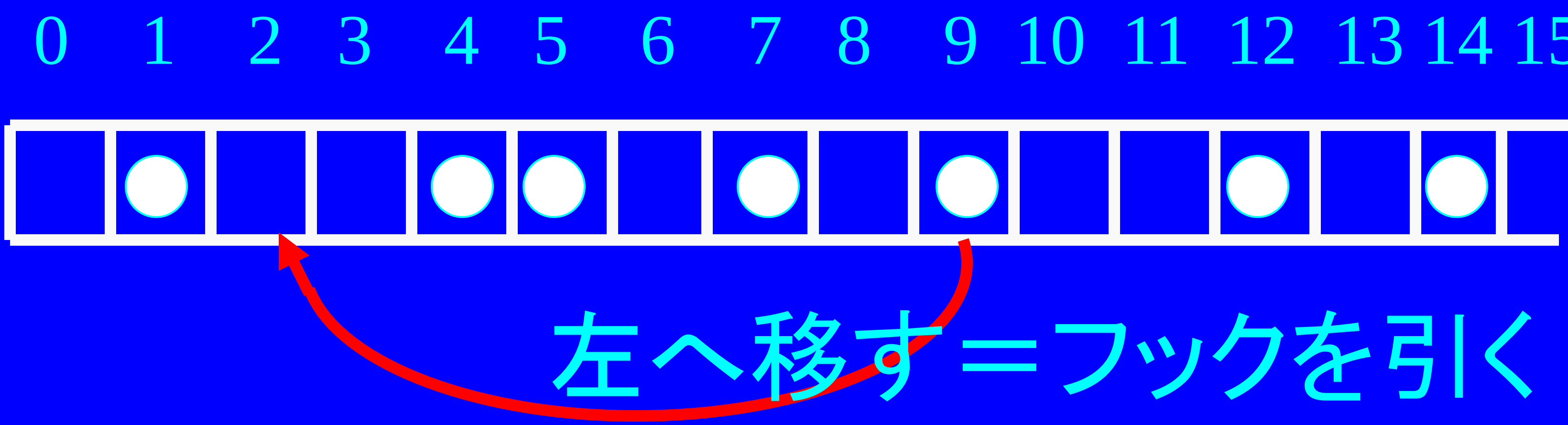


左端の箱のフック長を並べたものが β 数：

（1，4，5，7，9，12，14）

Sato のゲームの1行表示

β数の箇所に「石」をおく

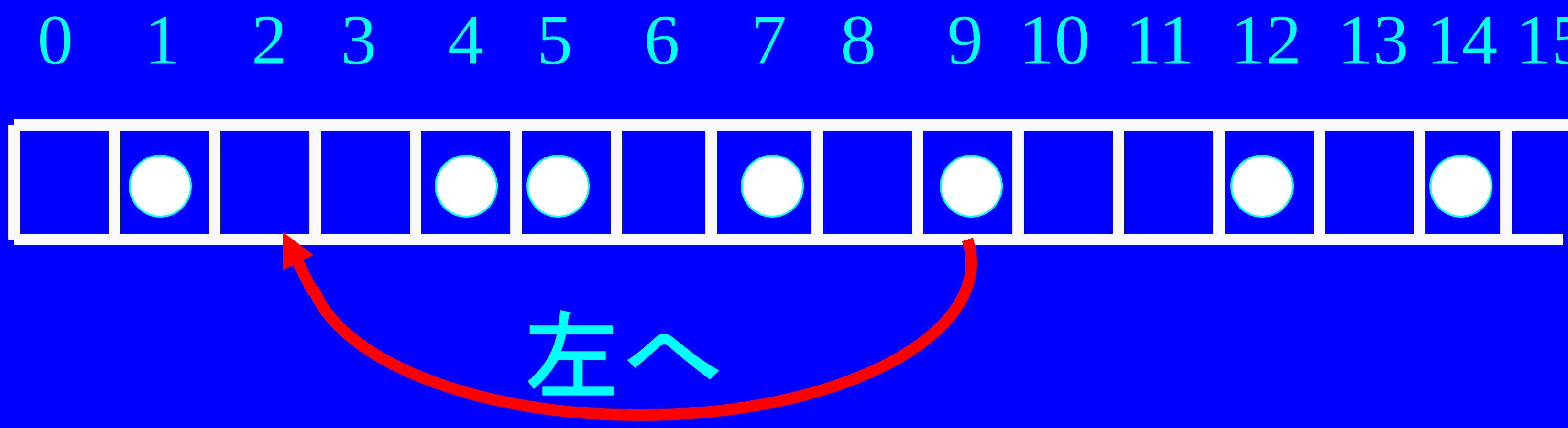


左へ移す＝フックを引く

石の移動距離＝フック長

Sato-Welter のゲーム

２人ゲーム：　盤に有限個の石を配置



交互に石を1コ選び、より左で石のないマス目へ移す。移せなくなったら負け。

文　献

C.P. Welter : Indag. Math. 16,　1954

佐藤幹夫 : 代数幾何Sympo報告集，1968

数学のあゆみ 15-1，　1970

J.H. Conway :　On Numbers and Games,

Ch.13，1976

今日の話:　フック構造をもつ

ゲームとアルゴリズム, 2011

http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kawanaka/sugaku(KAWANAKA).pdf

唐突ですが

自然数 n の2進展開

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots = 0, 1$$

$$n \equiv a_0 \mod 2$$

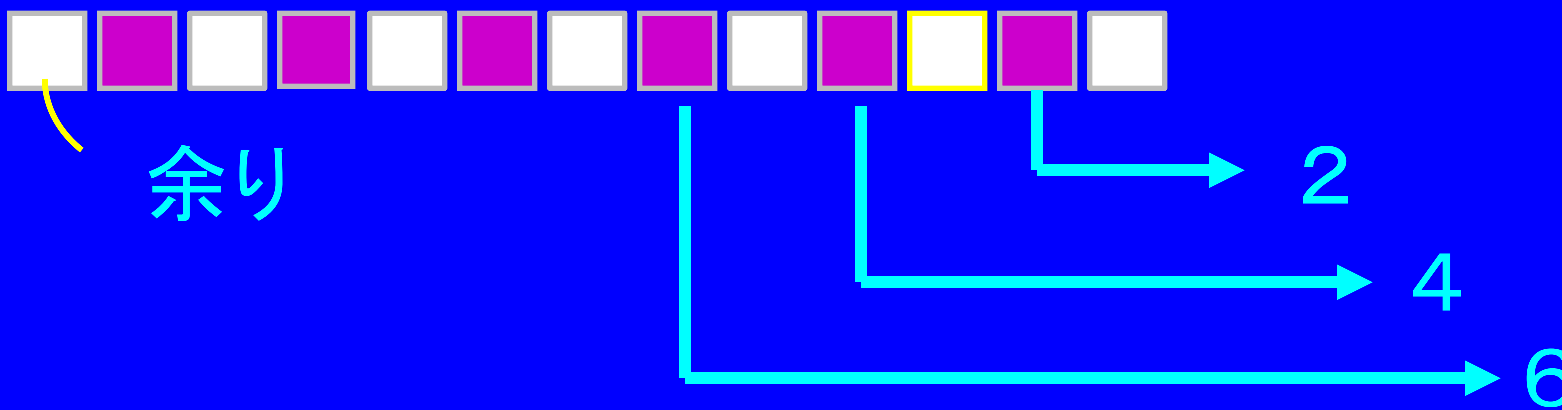
$$(n - a_0) \div 2 \equiv a_1 \mod 2$$

$$((n - a_0) \div 2 - a_1) \div 2 \equiv a_2 \mod 2$$

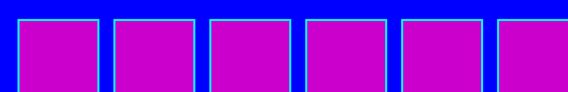
$$\cdots \qquad \cdots$$

$$n = \cdots \cdots a_2 a_1 a_0$$ （2進展開）

自然数÷2

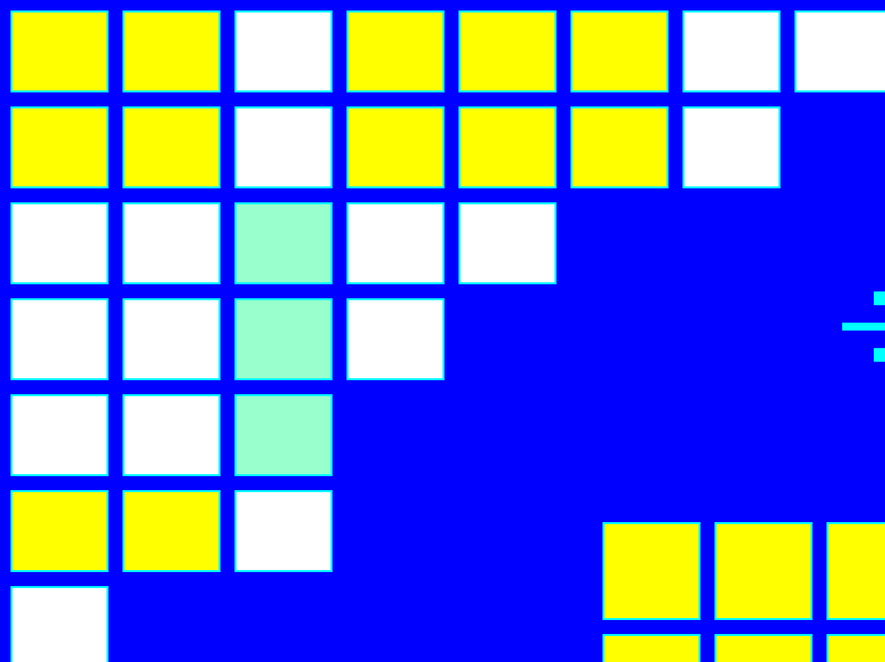


2または2の倍数を次々と
引いていく。残ったハコが余り

引き方のパターンが商 

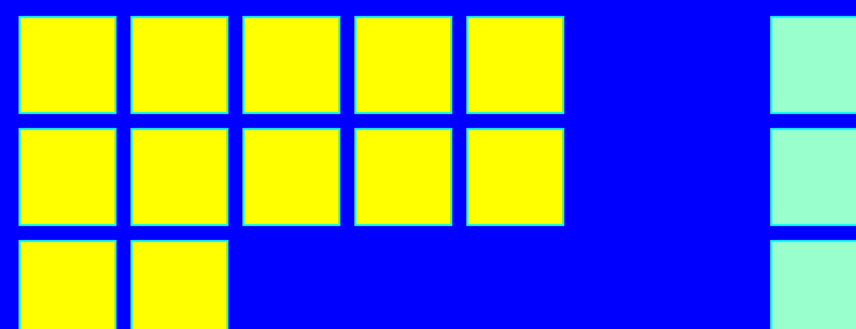
同じことをヤング図形でも・・・

ヤング図形÷２ の 商



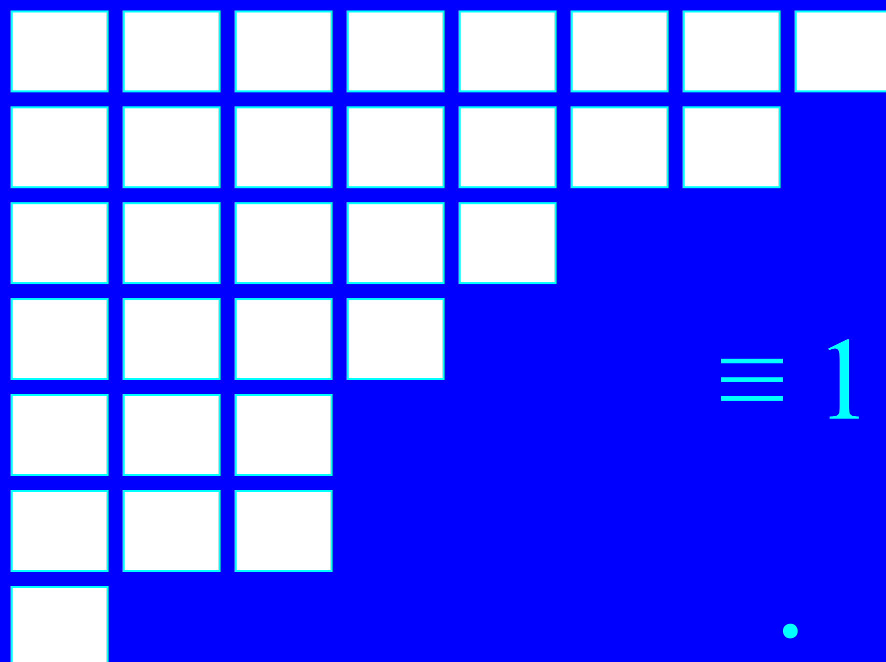
÷2 の商

＝



ヤング図形 Y の 2進展開 （1）

$Y =$

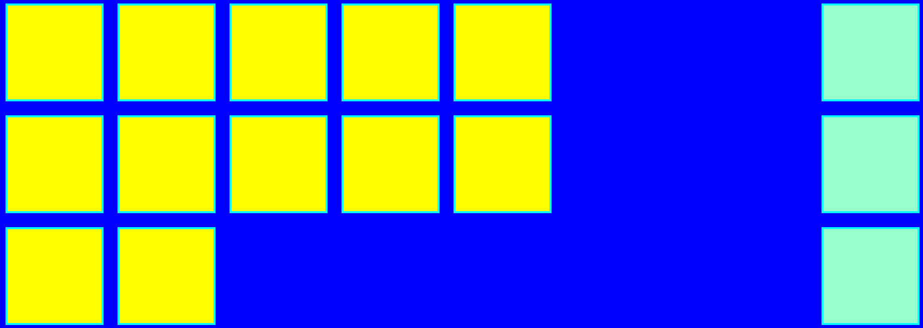


$$\equiv 1 \mod 2$$

$$\therefore\ a_0 = 1$$

ヤング図形 Y の 2進展開(2)

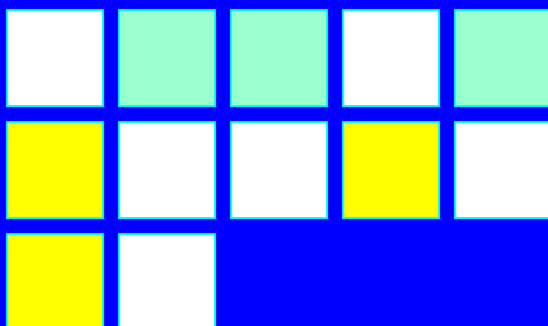
Y÷2 の商＝

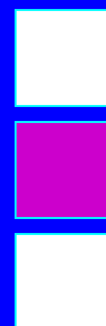


$\equiv 1 \mod 2$

$\therefore\ a_1 = 1$

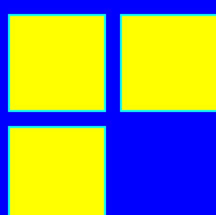
ヤング図形 Y の 2進展開(3)

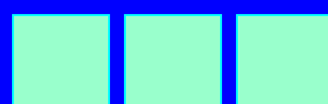


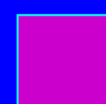


÷2 の商

$=$





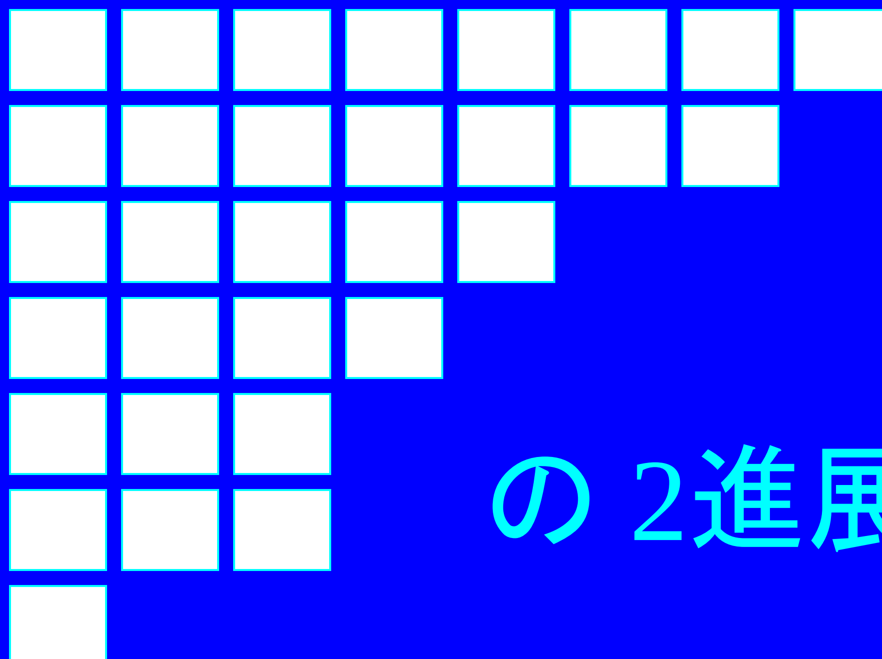


$\equiv 1 \mod 2$

$$\therefore \ a_2 = 1$$

ヤング図形 Y の 2進展開 （4）

Y ＝



の 2進展開

＝ 000・・・01111

定理（佐藤, Welter, Conway
の結果の言い換え）

ヤング図形Ｙの２進展開 ＝ ０

（初期値条件）

⇕

（大域的性質）

Ｙから始めるゲームは

後手に必勝手順 がある

（佐藤のゲームは「可解ゲーム」である!）

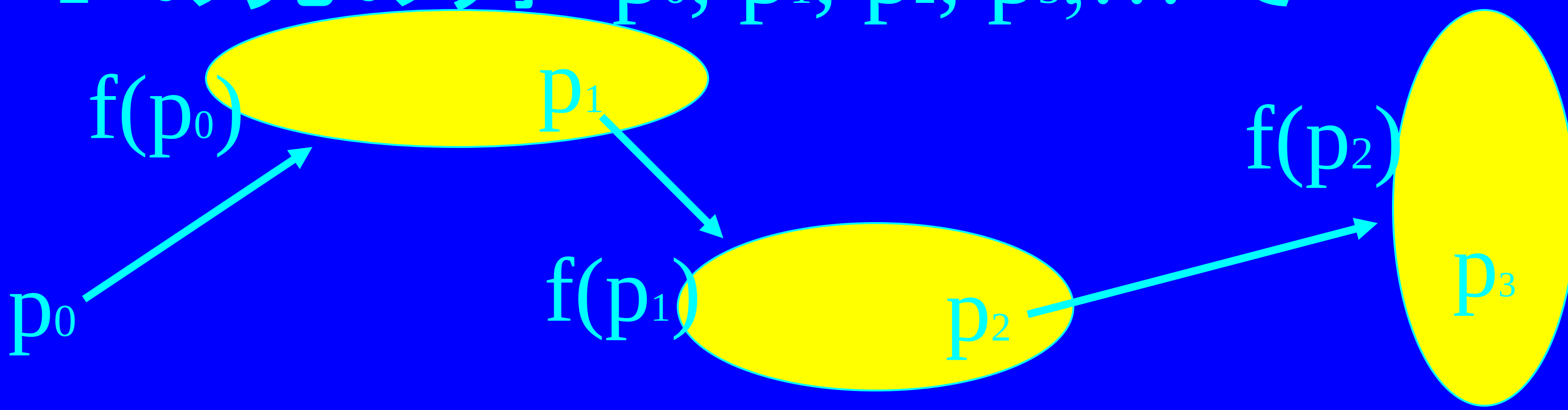
ゲームの定義

P ： 集合（局面の全体）

f ： P → 2^P （ゲームのルール）

(P, f) が ゲーム であるとは

P の元の列 $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ で



となる無限列はない、ということ

必勝手順を構成できるか？

答　できる。⟸　SWCの定理より
ずっと強い結果

一般に, 佐藤のゲーム
とその仲間について
（公理系で定義,
Coxeter 群を使って実現）

Klein の 4元群　G

$A = (-1, 1)$, $B = (1, -1)$,

$AB = BA = (-1, -1)$, $E = (1, 1)$

:位数4の可換群

$A^2 = B^2 = (AB)^2 = E$

:最も易しい非巡回群

（G は S_4 の正規部分群）

G の非自明な部分群

$$H_{AB} = \{ E, AB \}$$

$$H_A = \{ E, A \}$$

$$H_B = \{ E, B \}$$

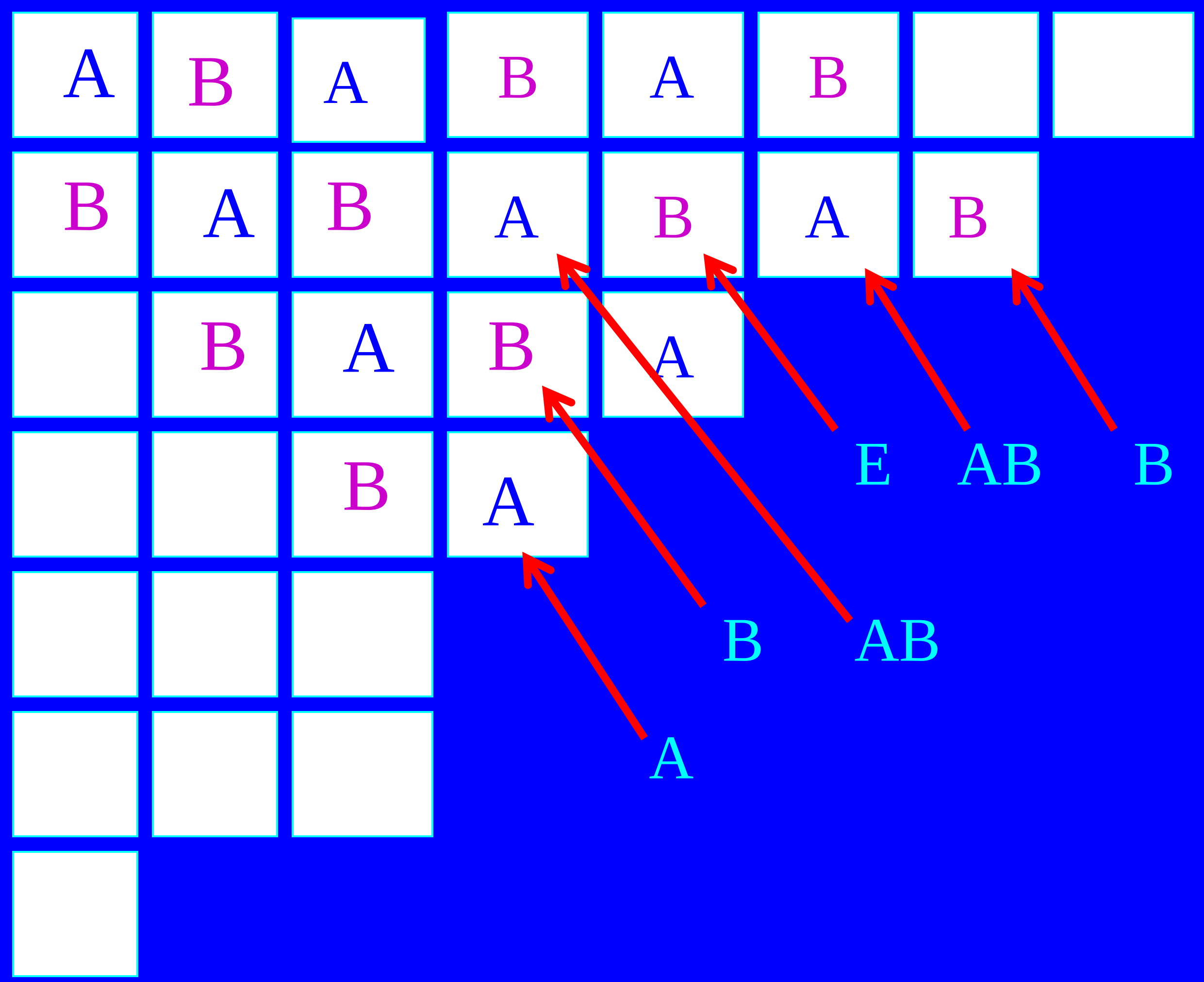
G の生成元 A, B をハコに入れる

Y =

A	B	A	B	A	B		
B	A	B	A	B	A	B	
	B	A	B	A			
		B	A				

フック内の元の積を計算

Y =



フックに入っている元の積を記入

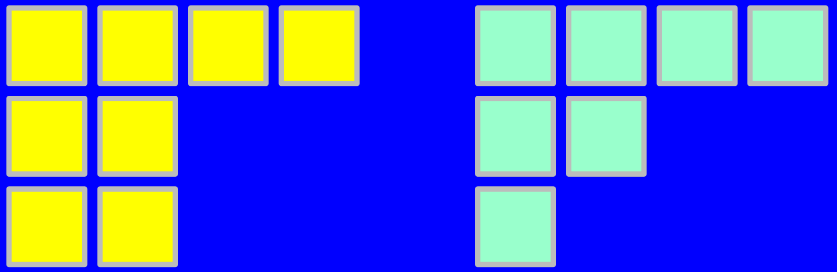
Y ＝

AB	E	A	E	AB	E	A	B
E	A	B	A	E	AB	B	
A	B	AB	B	A			
B	A	E	A				
A	B	AB					
E	AB	B					
A							

G の部分群 H_B = { E, B } に対応する商

Y =

AB	E	A	E	AB	E	A	B
E	A	B	AB	E	AB	B	
A	B	AB	B	A			
B	A	E	A				
A	B	AB					
E	AB	B					
A							



定理 （必勝法計算手順）

まず , Y の2進展開を計算

$\cdots \quad \cdots \quad a_2\, a_1\, a_0$

① $a_0 = 0$ のとき　H_{AB} 商へ

② $a_0 \neq 0,\ a_1 = 0$ のとき　H_A 商へ

③ $a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0$ のとき　H_B 商へ

（便宜上、SWCの定理を使った説明をしているが, SWCの定理も同時に証明する。）

今, 考えているYについては

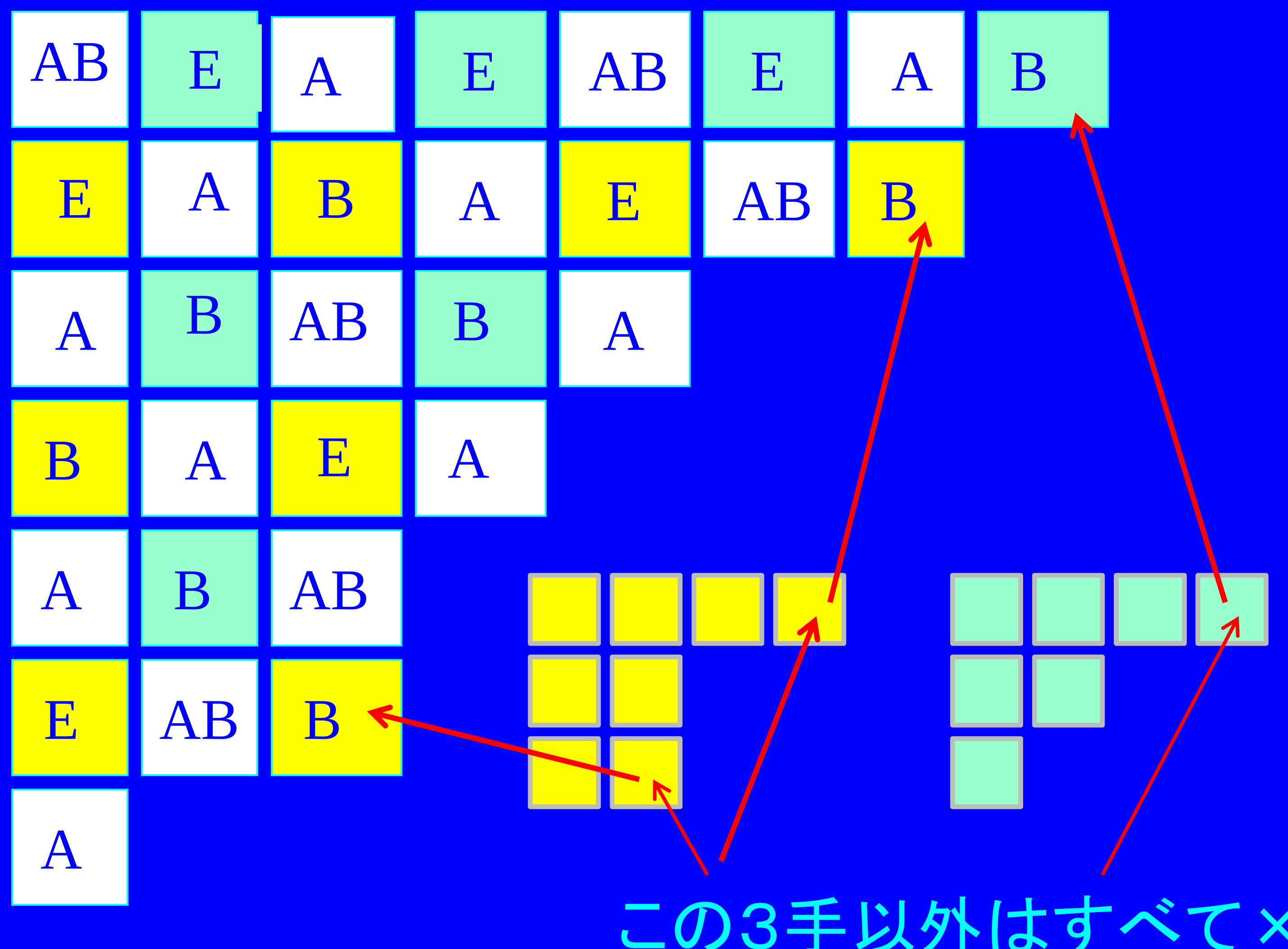
　2進展開は　　$000\cdots01111 \neq 0$

よって, 先手に必勝手順がある。

　③ のケース　H_B 商へ

G の部分群 H_B = { E, B } に対応する商

$Y =$



非決定的な力学系

２人ゲーム、１人ゲーム

（非決定性）アルゴリズム

確率アルゴリズム

マルコフ連鎖

力学系

（今日は「２人ゲーム」に集中した）

ありがとうございました。