力学の典型的な例題

「ニュートンの運動の三法則」

第一法則「慣性の法則」:
「**物体にはたらく力の和がゼロの場合、物体は等速直線運動する**
あるいは静止する(⇐等速直線運動の速度=0の場合)」

力がつりあっている、ならば

↓

物体は静止している

↓

「慣性の法則」より

↓

物体にはたらく力の和(=ベクトル的合計)がゼロである

(力のつりあいの条件)

第二法則「運動の法則」:

「質点にはたらいている力の合計(=ベクトル和)と加速度は比例する、その比例定数が質量である」

式で書くと: $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$ として

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$(= m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2)$$

"質量＝加速・減速のされにくさ(=慣性)を表す物理量 (単位kg)"

第三法則「作用反作用の法則」:

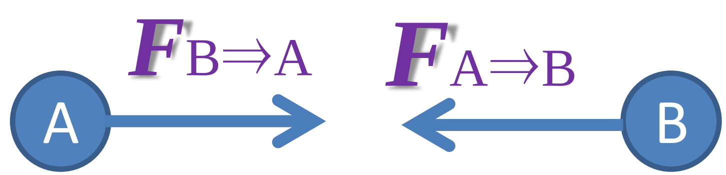
「**質点Aが質点Bに及ぼす力は、質点Bが質点Aに及ぼす力と大きさは同じで、向きは反対である**」

式で書くと:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}\Rightarrow\mathrm{B}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{A}}$$

斥力(反発力)の場合

引力の場合



地球上の物体Aは、地球に引かれている

地球は、地球上の物体Aに引かれている（**作用・反作用の法則**）

実験・観測によれば、

物体Aにはたらいている力の向き：地球の中心方向

物体Aにはたらいている力の大きさ：物体Aの質量に正比例

（地球の質量にも正比例）

この力を重力（万有引力）とよぶ

ニュートンの重力理論によれば、

物体Aの質量をm、地球の質量をM、

物体Aと地球の中心との距離Rとすれば、重力の大きさFは

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$ となる。

Gは万有引力定数（≒$6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$）

$$F=\frac{GMm}{R^2}$$

$G \fallingdotseq 6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$）と
地球の質量$M \fallingdotseq 5.97\times10^{24}\mathrm{kg}$
物体Aが地球表面近くにあるとして、
R=地球半径$\fallingdotseq 6380\times10^{3}\mathrm{m}$を
代入すると、

$$\frac{GM}{R^2}\approx 9.79\mathrm{N/kg}=9.79\mathrm{kgms^{-2}/kg}=9.79\mathrm{m/s^2}\equiv g$$

となる

gの値は場所により、僅かに異なる：
（例えば京都：$9.79707\mathrm{m/s^2}$
東京：$9.79789\mathrm{m/s^2}$）

質量1kgの物体が地球から引かれる力の大きさ $F=mg$
$\approx 1\mathrm{kg}\times g = 1\mathrm{kg}\times 9.8\mathrm{N/kg} = 9.8\mathrm{N}$

1Nの力で地球に引かれる物質の質量≈1N/9.8N/kg=0.102kg

1N≈「地球上で約102gの物体を吊った際に釣り合うだけの力」

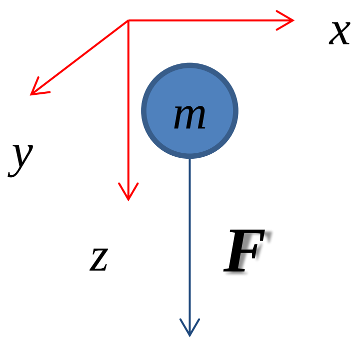
質量の定義

「$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$」を用いる$m$の定義　（慣性質量）
（1Nの力を与えた際に1m/s^{2}の加速度が生じた＝1kgだ！）

「重力=mg」を用いるmの定義（重力質量）
（地球にg Nの重力で引かれている＝1kgや！！）

なぜ慣性質量と重力質量が等しいのか？
⇒アインシュタインの世界へ
（一般相対性理論）

$$\boldsymbol{F} = (0, 0, mg)$$



$$\boldsymbol{F}=\mathrm{m}\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$$

$$F_\mathrm{x}=md^2x/dt^2$$
$$F_\mathrm{y}=md^2y/dt^2$$
$$F_\mathrm{z}=md^2z/dt^2$$

$$0=m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$$
$$0=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$$
$$\int 0\,\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2\mathrm{d}t$$
$$C_\mathrm{x}=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$$

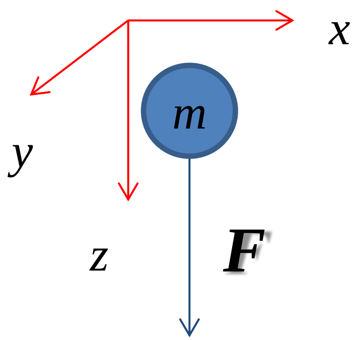
$$\int C_\mathrm{x}\mathrm{d}t=\int(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t$$
$$C_\mathrm{x}t+D_\mathrm{x}=x$$

$$x(t)=v_{\mathrm{x}0}t+x_0$$

y方向も同様に
計算して

$$y(t)=v_{\mathrm{y}0}t+y_0$$

$\boldsymbol{F} = (0, 0, mg)$



z方向は

$F_z = m\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$

$mg = m\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$

$g = \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$

$\int g\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2\,\mathrm{d}t$

$gt + C_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$

$\int gt + C_z\,\mathrm{d}t = \int (\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t$

$gt^2/2 + C_z t + D_z = z$

$z(t) = gt^2/2 + v_{z0}t + z_0$

まとめると、

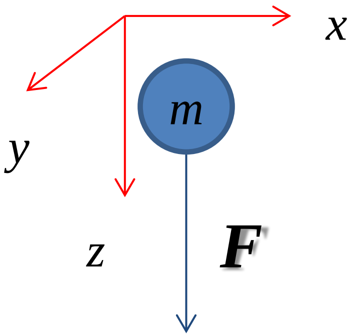
$\boldsymbol{a}(t) = (0, 0, g)$

（g=地上の重力により生じる加速度の大きさ≒重力加速度）

$\boldsymbol{v}(t) = (v_{x0}, v_{y0}, gt + v_{z0})$

$\boldsymbol{r}(t) = (v_{x0}t + x_0, v_{y0}t + y_0, gt^2/2 + v_{z0}t + z_0)$

$$\boldsymbol{F} = (0, 0, mg)$$

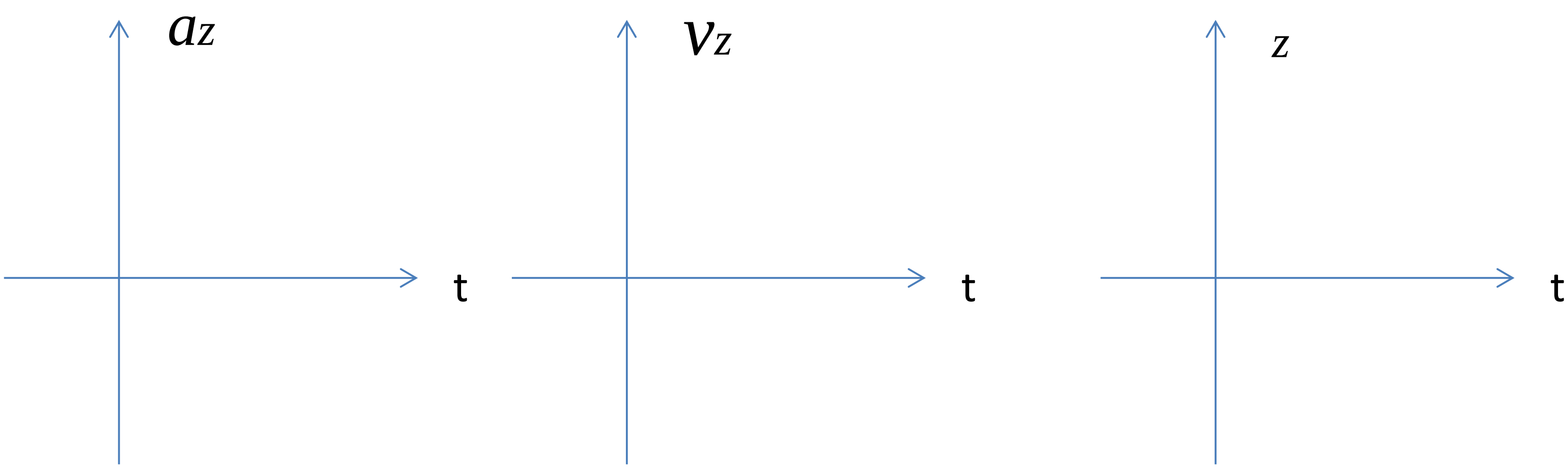


“t=0に座標原点からそっと落とした”場合は、

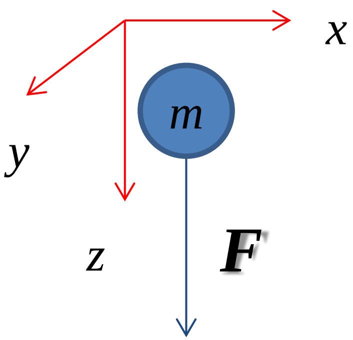
$\boldsymbol{a}(t)=(0, 0, g)$

$\boldsymbol{v}(t)=(0, 0, gt)$

$\boldsymbol{r}(t)=(0, 0, gt^2/2)$　となる



$$\boldsymbol{F} = (0,\ 0,\ mg)$$

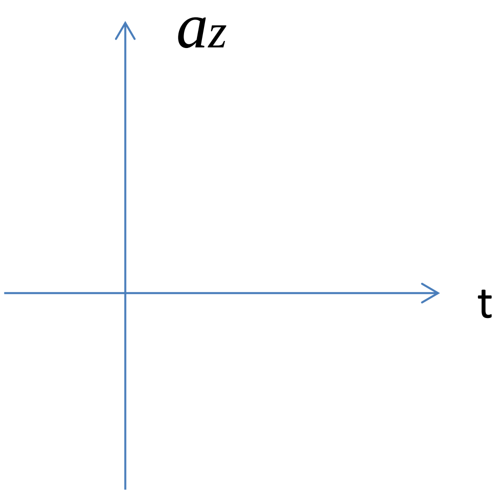


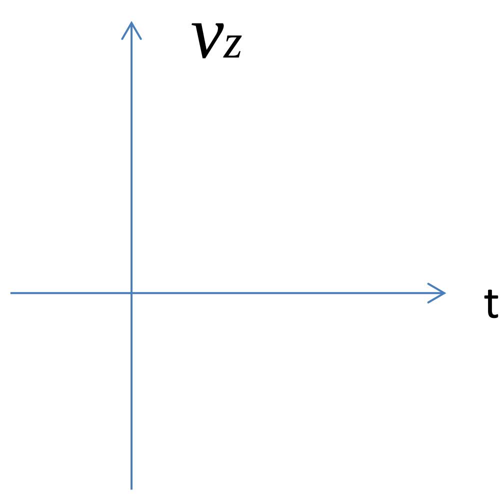
“$\boldsymbol{v}(0)=(0,\ v_{y0},\ 0)$、$\boldsymbol{r}(t)=(0,\ 0,\ 0)$”の場合には、

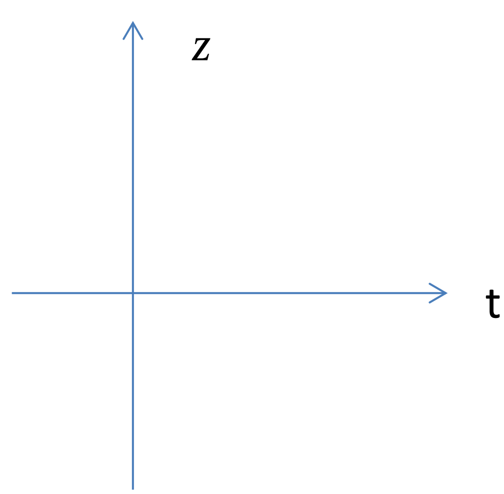
$\boldsymbol{a}(t)=(0,\ 0,\ g)$

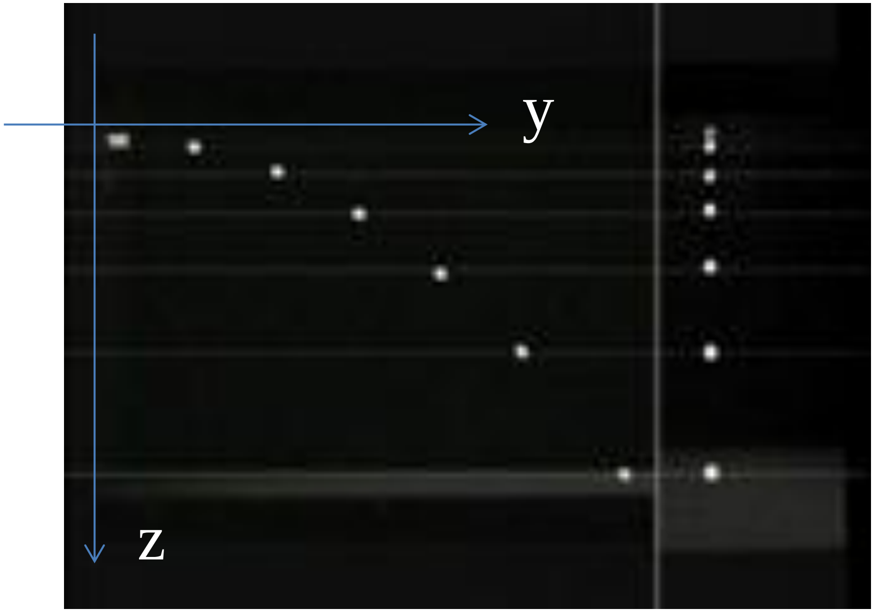
$\boldsymbol{v}(t)=(0,\ v_{y0},\ gt)$

$\boldsymbol{r}(t)=(0,\ v_{y0}t,\ gt^2/2)$ となる







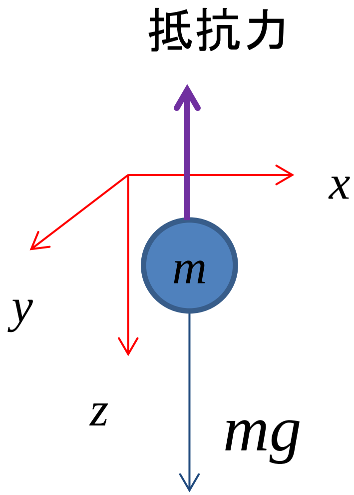


今の場合x、y、z方向の各運動は独立

$$\boldsymbol{a}(t)=(0,\ 0,\ g)$$

$$\boldsymbol{v}(t)=(v_{x0},\ v_{y0},\ gt+v_{z0})$$

$$\boldsymbol{r}(t)=(v_{x0}t+x_0,\ v_{y0}t+y_0,\ gt^2/2+v_{z0}t+z_0)$$

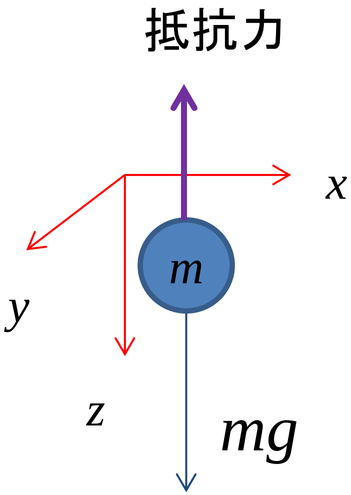


空気抵抗がある場合、質点は重力の他に
抵抗力 $-\gamma \boldsymbol{v}$ も受ける。（γ は定数）
$\boldsymbol{F}$ は

$\boldsymbol{F} = (0, 0, mg-\gamma v_z)$ となる

x方向、y方向の運動に変更はないが、z方向の運動方程式：
$F_z=m\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$ は
$mg-\gamma v_z=m\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$
と変更される

$\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$ なので、運動方程式は（さらに少し変形を加えて）
$-(\gamma/m)\times(v_z-mg/\gamma)=\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t$



$-\gamma/m \times (v_z - mg/\gamma) = dv_z/dt$

$V = v_z - mg/\gamma$ とおくとmg/γは定数なので、

$dV/dt = dv_z/dt$ である　よって、上の運動方程式は

$-(\gamma/m) \times V = dV/dt$ となる

この条件を満たす$V(t)$の関数形は

$V = V_0 \exp(-\gamma t/m)$ のみ（V_0は定数）

よって

$v_z - mg/\gamma = V_0 \exp(-\gamma t/m)$

$v_z(t) = V_0 \exp(-\gamma t/m) + mg/\gamma$

$v_z(0) = 0$ ならば（そっと落とした場合には）、

$V_0 = -mg/\gamma$ である。よって、

$v_z(t) = (mg/\gamma)\{1 - \exp(-\gamma t/m)\}$

加速度はこれを微分して

$a_z = g \exp(-\gamma t/m)$ となることがわかる

宿題:
前のページで導いた加速度と速度について
・時間-加速度のグラフと
・時間-速度のグラフの概略を描いてみよう

注: 大学では e^{x} を $\exp(x)$ と表記する