トーリックイデアルの２０年

大杉英史

立教大学理学部, JST CREST

第 55 回代数学シンポジウム
北海道大学学術交流会館，2010 年 8 月 9 日

概要

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$: $\mathbb{R}^d$ の配置

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$」を仮定）

K : 体

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K 上のローラン多項式環

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ のとき，$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ と表す）

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$ 　　A のトーリック環

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K 上の n 変数多項式環

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A]$, $\pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i}$ $(1 \leq i \leq n)$: 全射環準同型

$I_A := \ker \pi$ $(\subset K[X])$ 　　A のトーリックイデアル

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d : \mathbb{R}^d$ の配置

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$」を仮定）

K : 体

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K 上のローラン多項式環

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ のとき，$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ と表す）

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$ A のトーリック環

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K 上の n 変数多項式環

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A]$, $\pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i}$ $(1 \leq i \leq n)$: 全射環準同型

$I_A := \ker \pi$ $(\subset K[X])$ A のトーリックイデアル

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d : \mathbb{R}^d$ の配置

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$」を仮定）

K : 体

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K 上のローラン多項式環

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ のとき，$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ と表す）

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$　　A のトーリック環

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K 上の n 変数多項式環

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A]$, $\pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i}$ $(1 \leq i \leq n)$: 全射環準同型

$I_A := \ker \pi$ $(\subset K[X])$　　A のトーリックイデアル

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d : \mathbb{R}^d$ の配置

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$」を仮定）

K : 体

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K 上のローラン多項式環

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ のとき，$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ と表す）

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$　　A のトーリック環

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K 上の n 変数多項式環

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A], \ \pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i} \ (1 \leq i \leq n)$: 全射環準同型

$I_A := \ker \pi \ (\subset K[X])$　　A のトーリックイデアル

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$: $\mathbb{R}^d$ の配置

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$」を仮定）

K : 体

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K 上のローラン多項式環

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ のとき，$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ と表す）

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$　　A のトーリック環

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K 上の n 変数多項式環

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A]$, $\pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i}$ $(1 \leq i \leq n)$: 全射環準同型

$I_A := \ker \pi$ $(\subset K[X])$　　A のトーリックイデアル

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$: $\mathbb{R}^d$ の配置

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$」を仮定）

K : 体

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K 上のローラン多項式環

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ のとき，$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ と表す）

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$　　A のトーリック環

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K 上の n 変数多項式環

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A]$, $\pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i}$ $(1 \leq i \leq n)$: 全射環準同型

$I_A := \ker \pi$ $(\subset K[X])$　　A のトーリックイデアル

トーリックイデアルの定義

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d : \mathbb{R}^d$ **の配置**

（「$\exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ s.t. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$**」を仮定）**

K : **体**

$K[T, T^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}]$: K **上のローラン多項式環**

（ただし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ **のとき，**$T^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}$ **と表す）**

$K[A] = K[T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}] \subset K[T, T^{-1}]$　　**A のトーリック環**

$K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$: K **上の** n **変数多項式環**

$\pi : K[X] \longrightarrow K[A], \ \pi(x_i) = T^{\mathbf{a}_i} \ (1 \le i \le n)$: **全射環準同型**

$I_A := \ker \pi \ (\subset K[X])$　　**A のトーリックイデアル**

トーリックイデアルの例

Example

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_6\}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{の列ベクトル}$$

$K[A] = K[t_1t_3, t_1t_4, t_1t_5, t_2t_3, t_2t_4, t_2t_5]$

$I_A = \langle x_1x_5 - x_2x_4,\ x_1x_6 - x_3x_4,\ x_2x_6 - x_3x_5 \rangle$

(例えば，$x_1x_5 - x_2x_4 \in I_A \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$)

トーリックイデアルの例

Example

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_6\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ の列ベクトル

$$K[A] = K[t_1t_3, t_1t_4, t_1t_5, t_2t_3, t_2t_4, t_2t_5]$$

$$I_A = \langle x_1x_5 - x_2x_4,\ x_1x_6 - x_3x_4,\ x_2x_6 - x_3x_5 \rangle$$

(例えば，$x_1x_5 - x_2x_4 \in I_A \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$)

トーリックイデアルの例

Example

$$\begin{aligned} A &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_6\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ の列ベクトル} \end{aligned}$$

$K[A] = K[t_1 t_3, t_1 t_4, t_1 t_5, t_2 t_3, t_2 t_4, t_2 t_5]$

$I_A = \langle x_1 x_5 - x_2 x_4,\ x_1 x_6 - x_3 x_4,\ x_2 x_6 - x_3 x_5 \rangle$

(例えば，$x_1 x_5 - x_2 x_4 \in I_A \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$)

トーリックイデアルの例

Example

$$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_6\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{の列ベクトル}$$

$K[A] = K[t_1t_3, t_1t_4, t_1t_5, t_2t_3, t_2t_4, t_2t_5]$

$I_A = \langle x_1x_5 - x_2x_4,\ x_1x_6 - x_3x_4,\ x_2x_6 - x_3x_5 \rangle$

（例えば，$x_1x_5 - x_2x_4 \in I_A \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$）

基本的な性質

トーリックイデアルの性質

- **素イデアル**
- $I_A = \langle p - q \in K[X] \mid p, q$ は単項式，$\pi(p) = \pi(q) \rangle$
- A を $d \times n$ 行列とみなせば，
  $I_A = \left\langle X^{\mathbf{u}} - X^{\mathbf{v}} \in K[X] \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \right\rangle$
  $I_A = \left\langle X^{\mathbf{u}^+} - X^{\mathbf{u}^-} \in K[X] \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n,\ A\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\rangle$
- 簡単のため，各 $\mathbf{a}_i$ が非負整数ベクトルであるとすると，
  $I_A = \langle x_1 - T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, x_n - T^{\mathbf{a}_n} \rangle \cap K[X]$ が成り立つ。

基本的な性質

トーリックイデアルの性質

- **素イデアル**
- $I_A = \langle p - q \in K[X] \mid p, q$ **は単項式**, $\pi(p) = \pi(q) \rangle$
- A を $d \times n$ 行列とみなせば，
  $I_A = \langle X^{\mathbf{u}} - X^{\mathbf{v}} \in K[X] \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \rangle$
  $I_A = \left\langle X^{\mathbf{u}^+} - X^{\mathbf{u}^-} \in K[X] \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n,\ A\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\rangle$
- 簡単のため，各 $\mathbf{a}_i$ が非負整数ベクトルであるとすると，
  $I_A = \langle x_1 - T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, x_n - T^{\mathbf{a}_n} \rangle \cap K[X]$ が成り立つ。

基本的な性質

トーリックイデアルの性質

- 素イデアル
- $I_A = \langle p - q \in K[X] \mid p, q$ は単項式 , $\pi(p) = \pi(q) \rangle$
- A を $d \times n$ 行列とみなせば，
  $I_A = \langle X^{\mathbf{u}} - X^{\mathbf{v}} \in K[X] \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \rangle$
  $I_A = \left\langle X^{\mathbf{u}^+} - X^{\mathbf{u}^-} \in K[X] \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n,\ A\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\rangle$
- 簡単のため，各 $\mathbf{a}_i$ が非負整数ベクトルであるとすると，
  $I_A = \langle x_1 - T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, x_n - T^{\mathbf{a}_n} \rangle \cap K[X]$ が成り立つ。

基本的な性質

トーリックイデアルの性質

- 素イデアル
- $I_A = \langle p - q \in K[X] \mid p, q$ は単項式 , $\pi(p) = \pi(q) \rangle$
- A を $d \times n$ 行列とみなせば，
  $I_A = \left\langle X^{\mathbf{u}} - X^{\mathbf{v}} \in K[X] \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \right\rangle$
  $I_A = \left\langle X^{\mathbf{u}^+} - X^{\mathbf{u}^-} \in K[X] \mid \mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n,\ A\mathbf{u} = \mathbf{0} \right\rangle$
- 簡単のため，各 $\mathbf{a}_i$ が非負整数ベクトルであるとすると，
  $I_A = \langle x_1 - T^{\mathbf{a}_1}, \dots, x_n - T^{\mathbf{a}_n} \rangle \cap K[X]$ が成り立つ。

トーリックイデアルの２０年（？）

トーリックイデアルの文献

- 以前から，多くの研究者によって研究されてきた。
- 例えば，Sturmfels の Lecture Note (後述) では，

  J. Herzog
  Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings
  Manuscripta Math., **3** (1970), 175 – 193.

  が "early reference" として挙げられている。

トーリックイデアルの２０年（？）

トーリックイデアルの文献

- 以前から，多くの研究者によって研究されてきた。
- 例えば，Sturmfels の Lecture Note (後述) では，

J. Herzog
Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings
Manuscripta Math., **3** (1970), 175 – 193.

が “early reference" として挙げられている。

トーリックイデアルの２０年

凸多面体の三角形分割

- I. M. Gel’fand, A. V. Zelevinskii and M. M. Kapranov
  Hypergeometric functions and toral manifolds
  Functional Analysis and Its Applications, **23** (1989), 94 – 106.
- B. Sturmfels
  Gröbner bases of toric varieties
  Tôhoku Math. J. **43** (1991), 249 – 261.

トーリックイデアルの２０年

整数計画問題

P. Conti and C. Traverso
Buchberger algorithm and integer programming
in Proceedings of AAECC-9 (New Orleans)
Springer LNCS **539** (1991), 130 – 139.

分割表の検定（マルコフ連鎖モンテカルロ法）

P. Diaconis and B. Sturmfels
Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions
Annals of Statistics, **26** (1998), 363 – 397.
(Received June 1993; revised April 1997.)

トーリックイデアルの２０年

整数計画問題

- P. Conti and C. Traverso
  Buchberger algorithm and integer programming
  in Proceedings of AAECC-9 (New Orleans)
  Springer LNCS **539** (1991), 130 – 139.

分割表の検定（マルコフ連鎖モンテカルロ法）

- P. Diaconis and B. Sturmfels
  Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions
  Annals of Statistics, **26** (1998), 363 – 397.
  (Received June 1993; revised April 1997.)

トーリックイデアルの２０年

これらについて解説した Lecture Note:

- B. Sturmfels
  Gröbner bases and convex polytopes
  Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

以下の本でも解説されている：

- 日比孝之編
  グレブナー基底の現在（いま）
  数学書房，2006 年

トーリックイデアルの２０年

これらについて解説した Lecture Note:

- B. Sturmfels
  Gröbner bases and convex polytopes
  Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

以下の本でも解説されている：

- 日比孝之編
  グレブナー基底の現在（いま）
  数学書房，2006 年

グレブナー基底

Definition

単項式全体の集合における全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件をみたすときにいう：

1. 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して，$1 < u$ が成り立つ。
2. 任意の単項式 u, v, w に対して，「$u < v \Rightarrow uw < vw$」が成り立つ。

Example (辞書式順序 $(x_1 > \cdots > x_n)$)

まず，x_1 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_2 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_3 に関して次数を比較して，　•••

グレブナー基底

Definition

単項式全体の集合における全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件をみたすときにいう：

1. 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して，$1 < u$ が成り立つ。
2. 任意の単項式 u, v, w に対して，「$u < v \Rightarrow uw < vw$」が成り立つ。

Example（辞書式順序 $(x_1 > \cdots > x_n)$）

まず，x_1 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_2 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_3 に関して次数を比較して，…

グレブナー基底

Definition

単項式全体の集合における全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件をみたすときにいう：

1. 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して，$1 < u$ が成り立つ。
2. 任意の単項式 u, v, w に対して，「$u < v \Rightarrow uw < vw$」が成り立つ。

Example (辞書式順序 $(x_1 > \cdots > x_n)$)

まず，x_1 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_2 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_3 に関して次数を比較して， •••

グレブナー基底

Definition

単項式全体の集合における全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件をみたすときにいう：

1. 任意の単項式 $u \neq 1$ に対して，$1 < u$ が成り立つ。
2. 任意の単項式 u, v, w に対して，「$u < v \Rightarrow uw < vw$」が成り立つ。

Example (辞書式順序 $(x_1 > \cdots > x_n)$)

まず，x_1 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_2 に関して次数を比較して，大きい方が大きい。
同じならば x_3 に関して次数を比較して， •••

グレブナー基底

単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

Definition

$0 \neq f \in K[X]$

$in_<(f)$: f に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のもの

$I \subset K[X]$: イデアル

$in_<(I) := \langle in_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$ 　　I のイニシャルイデアル

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ が $<$ に関する I のグレブナー基底

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad in_<(I) = \langle in_<(g_1), \ldots, in_<(g_t) \rangle$$

- イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。
- トーリックイデアルの（被約）グレブナー基底は斉次 2 項式からなる。

グレブナー基底

単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

Definition

$0 \neq f \in K[X]$

$in_<(f)$: f **に現れる単項式の中で** $<$ **に関して最大のもの**

$I \subset K[X]$: **イデアル**

$in_<(I) := \langle in_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$　　I **のイニシャルイデアル**

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ **が** $<$ **に関する** I **のグレブナー基底**

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad in_<(I) = \langle in_<(g_1), \ldots, in_<(g_t) \rangle$$

- **イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。**
- **トーリックイデアルの（被約）グレブナー基底は斉次 2 項式からなる。**

グレブナー基底

単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

Definition

$0 \neq f \in K[X]$

$in_<(f)$: f **に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のもの**

$I \subset K[X]$: **イデアル**

$in_<(I) := \langle in_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$ 　　**I のイニシャルイデアル**

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ **が $<$ に関する I のグレブナー基底**

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $in_<(I) = \langle in_<(g_1), \ldots, in_<(g_t) \rangle$

- **イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。**
- **トーリックイデアルの（被約）グレブナー基底は斉次 2 項式からなる。**

グレブナー基底

単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

Definition

$0 \neq f \in K[X]$

$in_<(f)$: f に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のもの

$I \subset K[X]$: イデアル

$in_<(I) := \langle in_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$　　　I のイニシャルイデアル

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ が $<$ に関する I のグレブナー基底

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $in_<(I) = \langle in_<(g_1), \ldots, in_<(g_t) \rangle$

- イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。
- トーリックイデアルの（被約）グレブナー基底は斉次 2 項式からなる。

グレブナー基底

単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

Definition

$0 \neq f \in K[X]$

$in_<(f)$: f に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のもの

$I \subset K[X]$: イデアル

$in_<(I) := \langle in_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$ 　　I のイニシャルイデアル

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ が $<$ に関する I のグレブナー基底

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ in_<(I) = \langle in_<(g_1), \ldots, in_<(g_t) \rangle$

- イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。
- トーリックイデアルの（被約）グレブナー基底は斉次 2 項式からなる。

グレブナー基底

単項式順序 $<$ を 1 つ固定する。

Definition

$0 \neq f \in K[X]$

$in_<(f)$: f **に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のもの**

$I \subset K[X]$: **イデアル**

$in_<(I) := \langle in_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$　　**I のイニシャルイデアル**

$\{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ **が $<$ に関する I のグレブナー基底**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ in_<(I) = \langle in_<(g_1), \ldots, in_<(g_t) \rangle$

- **イデアル I のグレブナー基底は I を生成する。**
- **トーリックイデアルの（被約）グレブナー基底は斉次 2 項式からなる。**

2 次のグレブナー基底

- トーリックイデアルのグレブナー基底については，例えば，以下の性質がよく研究されている。

(i) ある単項式順序に関して，I_A のグレブナー基底が 2 次の 2 項式からなる。

(ii) $K[A]$ は “Koszul 代数" である。

(iii) I_A は 2 次の 2 項式で生成される。

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) が成り立つが，一般に，(ii) $\Rightarrow$ (i) および (iii) $\Rightarrow$ (ii) は成り立たない。両者の反例は，例えば ･･･

H.Ohsugi and T.Hibi
Toric ideals generated by quadratic binomials
J. Algebra **218** (1999), 509 – 527.

2 次のグレブナー基底

- トーリックイデアルのグレブナー基底については，例えば，以下の性質がよく研究されている。

(i) ある単項式順序に関して，I_A のグレブナー基底が 2 次の 2 項式からなる。
(ii) $K[A]$ は "Koszul 代数" である。
(iii) I_A は 2 次の 2 項式で生成される。

- (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) が成り立つが，一般に，(ii) ⇒ (i) および (iii) ⇒ (ii) は成り立たない。両者の反例は，例えば ···

H.Ohsugi and T.Hibi
Toric ideals generated by quadratic binomials
J. Algebra **218** (1999), 509 – 527.

2 次のグレブナー基底

- トーリックイデアルのグレブナー基底については，例えば，以下の性質がよく研究されている。

(i) ある単項式順序に関して，I_A のグレブナー基底が 2 次の 2 項式からなる。

(ii) $K[A]$ は “Koszul 代数" である。

(iii) I_A は 2 次の 2 項式で生成される。

- (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) が成り立つが，一般に，(ii) ⇒ (i) および (iii) ⇒ (ii) は成り立たない。両者の反例は，例えば ···

H.Ohsugi and T.Hibi
Toric ideals generated by quadratic binomials
J. Algebra **218** (1999), 509 – 527.

凸多面体

Definition

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ に対して，

$$\mathrm{Conv}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mathbf{a}_i \in \mathbb{Q}^d \;\middle|\; 0 \leq r_i \in \mathbb{Q}, \ \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \right\}$$

を A の**凸閉包**という。

Definition

$P \subset \mathbb{Q}^d$ が**整凸多面体**であるとは，$P = \mathrm{Conv}(A)$ をみたす有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^d$ が存在するときにいう。

凸多面体

Definition

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ に対して，

$$\mathrm{Conv}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i \, \mathbf{a}_i \in \mathbb{Q}^d \;\middle|\; 0 \leq r_i \in \mathbb{Q}, \; \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \right\}$$

を A の**凸閉包**という。

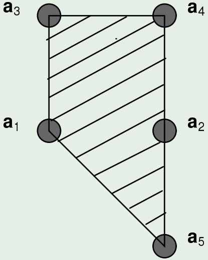
Definition

$P \subset \mathbb{Q}^d$ が**整凸多面体**であるとは，$P = \mathrm{Conv}(A)$ をみたす有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^d$ が存在するときにいう。

多面体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ のとき，$\mathrm{Conv}(A)$ は



三角形分割

Definition

整凸多面体 P が**単体**であるとは，P の頂点数が $1 + \dim P$ であるときにいう。（例：線分，三角形，四面体。）

Definition

A の**被覆**とは，A の元を頂点に持つような単体の集合 Δ で，$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{F \in \Delta} F$ をみたすものをいう。

Definition

A の被覆 Δ が **三角形分割**であるとは，

1. F' が $F \in \Delta$ の面ならば，$F' \in \Delta$
2. $F, F' \in \Delta$ ならば，$F \cap F'$ は F の面，かつ，F' の面

が成り立つときにいう。

三角形分割

Definition

整凸多面体 P が**単体**であるとは，P の頂点数が $1 + \dim P$ であるときにいう。（例：線分，三角形，四面体。）

Definition

A の**被覆**とは，A の元を頂点に持つような単体の集合 Δ で，$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{F \in \Delta} F$ をみたすものをいう。

Definition

A の被覆 Δ が **三角形分割**であるとは，

1. F' が $F \in \Delta$ の面ならば，$F' \in \Delta$
2. $F, F' \in \Delta$ ならば，$F \cap F'$ は F の面，かつ，F' の面

が成り立つときにいう。

三角形分割

Definition

整凸多面体 P が**単体**であるとは，P の頂点数が $1 + \dim P$ であるときにいう。（例：線分，三角形，四面体。）

Definition

A の**被覆**とは，A の元を頂点に持つような単体の集合 Δ で，$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{F \in \Delta} F$ をみたすものをいう。

Definition

A の被覆 Δ が **三角形分割**であるとは，

1. F' が $F \in \Delta$ の面ならば，$F' \in \Delta$
2. $F, F' \in \Delta$ ならば，$F \cap F'$ は F の面，かつ，F' の面

が成り立つときにいう。

イニシャル複体

Definition (イニシャル複体)

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$

$<$: 単項式順序

$$\Delta(in_<(I_A)) := \left\{ \mathrm{Conv}(B) \;\middle|\; \begin{array}{c} B \subset A \\ \prod_{\mathbf{a}_i \in B} x_i \notin \sqrt{in_<(I_A)} \end{array} \right\}$$

Theorem

$\Delta(in_<(I_A))$ は A の三角形分割である。

- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，A の三角形分割 $\Delta_{\mathbf{w}}$ が定義される。（正則三角形分割, Gel'fand et al.）
- $\Delta(in_{\mathbf{w}}(I_A)) = \Delta_{\mathbf{w}}$ が成り立つ。(Sturmfels)

イニシャル複体

Definition (イニシャル複体)

$A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$

$<$: 単項式順序

$$\Delta(in_<(I_A)) := \left\{ \mathrm{Conv}(B) \;\middle|\; \begin{array}{c} B \subset A \\ \prod_{\mathbf{a}_i \in B} x_i \notin \sqrt{in_<(I_A)} \end{array} \right\}$$

Theorem

$\Delta(in_<(I_A))$ は A の三角形分割である。

- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，A の三角形分割 $\Delta_\mathbf{w}$ が定義される。（正則三角形分割, Gel'fand et al.）
- $\Delta(in_\mathbf{w}(I_A)) = \Delta_\mathbf{w}$ が成り立つ。(Sturmfels)

イニシャル複体

Definition (イニシャル複体)

$A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$

$<$: **単項式順序**

$$\Delta(in_<(I_A)) := \left\{ \mathrm{Conv}(B) \;\middle|\; \begin{array}{c} B \subset A \\ \prod_{\mathbf{a}_i \in B} x_i \notin \sqrt{in_<(I_A)} \end{array} \right\}$$

Theorem

$\Delta(in_<(I_A))$ **は** A **の三角形分割である。**

- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ **に対して，** A **の三角形分割** $\Delta_\mathbf{w}$ **が定義される。（正則三角形分割**, Gel'fand et al.**）**
- $\Delta(in_\mathbf{w}(I_A)) = \Delta_\mathbf{w}$ **が成り立つ。**(Sturmfels)

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_1$: 辞書式順序 $(x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5)$

I_A の $<_1$ に関するグレブナー基底は

$$\{x_1x_2 - x_3x_5,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2^2 - x_4x_5, x_1^2x_4 - x_3^2x_5\}$$

$$in_{<_1}(I_A) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2x_4 \rangle, \quad \sqrt{in_{<_1}(I_A)} = \langle x_1x_4, x_2 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_1$: 辞書式順序 $(x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5)$

I_A の $<_1$ に関するグレブナー基底は

$$\{x_1x_2 - x_3x_5,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2^2 - x_4x_5, x_1^2x_4 - x_3^2x_5\}$$

$$in_{<_1}(I_A) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2x_4 \rangle, \quad \sqrt{in_{<_1}(I_A)} = \langle x_1x_4, x_2 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_1$: 辞書式順序 $(x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5)$

I_A の $<_1$ に関するグレブナー基底は

$$\{x_1x_2 - x_3x_5,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2^2 - x_4x_5, x_1^2x_4 - x_3^2x_5\}$$

$$in_{<_1}(I_A) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2x_4 \rangle, \quad \sqrt{in_{<_1}(I_A)} = \langle x_1x_4, x_2 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_1$: **辞書式順序** $(x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5)$

I_A **の** $<_1$ **に関するグレブナー基底は**

$$\{x_1x_2 - x_3x_5,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2^2 - x_4x_5, x_1^2x_4 - x_3^2x_5\}$$

$$in_{<_1}(I_A) = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_2^2, x_1^2x_4 \rangle, \quad \sqrt{in_{<_1}(I_A)} = \langle x_1x_4, x_2 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1 x_2 - x_3 x_5,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_2^2 - x_4 x_5 \rangle$$

$<_1$: **辞書式順序** $(x_2 > x_1 > x_3 > x_4 > x_5)$

I_A **の** $<_1$ **に関するグレブナー基底は**

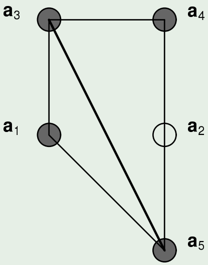
$$\{x_1 x_2 - x_3 x_5,\ x_2 x_3 - x_1 x_4,\ x_2^2 - x_4 x_5, x_1^2 x_4 - x_3^2 x_5\}$$

$$in_{<_1}(I_A) = \langle x_1 x_2, x_2 x_3, x_2^2, x_1^2 x_4 \rangle, \quad \sqrt{in_{<_1}(I_A)} = \langle x_1 x_4, x_2 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{in_{<_1}(I_A)} = \langle x_1 x_4, x_2 \rangle$$



イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_2$: 辞書式順序 $(x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1)$

I_A の $<_2$ に関するグレブナー基底は

$$\{x_3x_5 - x_1x_2,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_4x_5 - x_2^2\}$$

$$in_{<_2}(I_A) = \sqrt{in_{<_2}(I_A)} = \langle x_2x_3, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_2$: 辞書式順序 $(x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1)$

I_A の $<_2$ に関するグレブナー基底は

$$\{x_3x_5 - x_1x_2,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_4x_5 - x_2^2\}$$

$$in_{<_2}(I_A) = \sqrt{in_{<_2}(I_A)} = \langle x_2x_3, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_2$: **辞書式順序** $(x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1)$

I_A の $<_2$ に関するグレブナー基底は

$$\{x_3x_5 - x_1x_2,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_4x_5 - x_2^2\}$$

$$in_{<_2}(I_A) = \sqrt{in_{<_2}(I_A)} = \langle x_2x_3, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1x_2 - x_3x_5,\ x_1x_4 - x_2x_3,\ x_2^2 - x_4x_5 \rangle$$

$<_2$: **辞書式順序** $(x_5 > x_3 > x_4 > x_2 > x_1)$

I_A の $<_2$ に関するグレブナー基底は

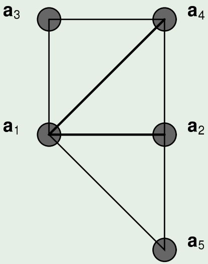
$$\{x_3x_5 - x_1x_2,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_4x_5 - x_2^2\}$$

$$in_{<_2}(I_A) = \sqrt{in_{<_2}(I_A)} = \langle x_2x_3, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$$

イニシャル複体の例

Example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{in_{<_2}(I_A)} = \langle x_2x_3, x_3x_5, x_4x_5 \rangle$$



unimodular な三角形分割

Definition

A の被覆（三角形分割）Δ が unimodular であるとは，Δ に属する任意の極大単体 σ の頂点集合 B に対して，$\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}B$ が成り立つときにいう。

（ただし，$\mathbb{Z}A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{a}_i \;\middle|\; z_i \in \mathbb{Z} \right\}$.）

Theorem

$\Delta(in_<(I_A))$ が unimodular $\Longleftrightarrow \sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$

unimodular な三角形分割

Definition

A の被覆（三角形分割）Δ が unimodular であるとは，Δ に属する任意の極大単体 σ の頂点集合 B に対して，$\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}B$ が成り立つときにいう。

（ただし，$\mathbb{Z}A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{a}_i \;\middle|\; z_i \in \mathbb{Z} \right\}$.）

Theorem

$\Delta(in_<(I_A))$ が *unimodular* $\iff \sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<$)

(ii) A は compressed
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<$)

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<$)

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，一般にそれぞれの逆は正しくない。

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
$(\Leftrightarrow \sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<)$

(ii) A は compressed
$(\Leftrightarrow \sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<)$

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
$(\Leftrightarrow \sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<)$

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 $(\Leftrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A)$

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，一般にそれぞれの逆は正しくない。

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<$)

(ii) A は compressed
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<$)

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<$)

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，一般にそれぞれの逆は正しくない。

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<$)

(ii) A は compressed
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<$)

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<$)

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，一般にそれぞれの逆は正しくない。

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<$)

(ii) A は compressed
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<$)

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<$)

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

● (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，
一般にそれぞれの逆は正しくない。

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<$)

(ii) A は compressed
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<$)

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<$)

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，一般にそれぞれの逆は正しくない。

重要な性質

(i) A は unimodular (任意の三角形分割は unimodular)
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any $<$)

(ii) A は compressed
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for any reverse lex. order $<$)

(iii) A は unimodular な正則三角形分割を持つ
($\Leftrightarrow$ $\sqrt{in_<(I_A)} = in_<(I_A)$ for some $<$)

(iv) A は unimodular な三角形分割を持つ

(v) A は unimodular な被覆を持つ

(vi) $K[A]$ は 正規 ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$)

● (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) が成り立つが，
一般にそれぞれの逆は正しくない。

positive root に付随する配置

Gel'fand–Graev–Postnikov (1997)

$A_{d-1} = \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$ $(\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^d$ は単位ベクトル$)$

$$\widetilde{A_{d-1}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A_{d-1} & \\ 0 & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

unimodular な三角形分割 $\Delta(in_<(I_{\widetilde{A_{d-1}}}))$ で，
$in_<(I_{\widetilde{A_{d-1}}})$ が 2 次の単項式で生成されるものが存在する。

O–Hibi (2002)

$D_d = \{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq d\} \cup A_{d-1}$
$B_d = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d\} \cup D_d$
$C_d = \{2\mathbf{e}_1, \ldots, 2\mathbf{e}_d\} \cup D_d$

positive root に付随する配置

Gel'fand–Graev–Postnikov (1997)

$A_{d-1} = \{\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$　($\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^d$ は単位ベクトル)

$$\widetilde{A_{d-1}} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A_{d-1} & \\ 0 & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

unimodular な三角形分割 $\Delta(in_<(I_{\widetilde{A_{d-1}}}))$ で，

$in_<(I_{\widetilde{A_{d-1}}})$ が 2 次の単項式で生成されるものが存在する。

O–Hibi (2002)

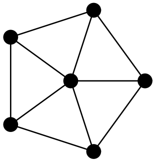
$D_d = \{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq d\} \cup A_{d-1}$

$B_d = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d\} \cup D_d$

$C_d = \{2\mathbf{e}_1, \ldots, 2\mathbf{e}_d\} \cup D_d$

辺凸多面体

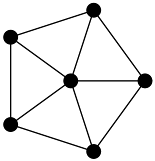
G : 頂点集合 $\{1, 2, \ldots, d\}$ 上の有限連結グラフ
$E(G)$: G の辺集合（ループ，重複辺なし）



G の各辺 $e = \{i, j\} \in E(G)$ に対して，$\rho(e) := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^d$
$A_G := \{\rho(e) \mid e \in E(G)\} \subset \mathbb{Z}^d$
$\mathrm{Conv}(A_G)$ を G の**辺凸多面体**という。

辺凸多面体

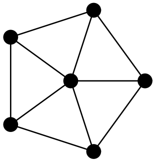
G : 頂点集合 $\{1, 2, \ldots, d\}$ 上の有限連結グラフ
$E(G)$: G の辺集合（ループ，重複辺なし）



G の各辺 $e = \{i, j\} \in E(G)$ に対して，$\rho(e) := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^d$
$A_G := \{\rho(e) \mid e \in E(G)\} \subset \mathbb{Z}^d$
$\mathrm{Conv}(A_G)$ を G の**辺凸多面体**という。

辺凸多面体

G : 頂点集合 $\{1, 2, \ldots, d\}$ 上の有限連結グラフ
$E(G)$: G の辺集合（ループ，重複辺なし）



G の各辺 $e = \{i, j\} \in E(G)$ に対して，$\rho(e) := \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^d$
$A_G := \{\rho(e) \mid e \in E(G)\} \subset \mathbb{Z}^d$
$\mathrm{Conv}(A_G)$ を G の**辺凸多面体**という。

辺凸多面体

Theorem (O–Hibi (1998), Simis et al. (1998))

有限連結グラフ G に対して，以下は同値：

1. $K[A_G]$ は正規
2. A_G は *unimodular* な被覆を持つ
3. G に現れる，頂点を共有しない任意の 2 つの奇サイクル C, C' に対して，
   C のある頂点と，C' のある頂点を結ぶような G の辺が存在する。

辺凸多面体

Theorem (O–Hibi (1998), Simis et al. (1998))

有限連結グラフ G に対して，以下は同値：

1. $K[A_G]$ は正規
2. A_G は *unimodular* な被覆を持つ
3. G に現れる，頂点を共有しない任意の 2 つの奇サイクル C, C' に対して，
   C のある頂点と，C' のある頂点を結ぶような G の辺が存在する。

辺凸多面体

Theorem (O–Hibi (1998), Simis et al. (1998))

有限連結グラフ G に対して，以下は同値：

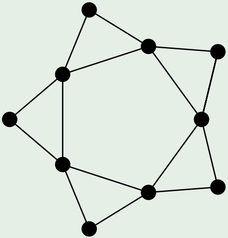
1. $K[A_G]$ は正規
2. A_G は *unimodular* な被覆を持つ
3. G に現れる，頂点を共有しない任意の 2 つの奇サイクル C, C' に対して，
C のある頂点と，C' のある頂点を結ぶような G の辺が存在する。

（貴重な）辺凸多面体

Example (O–Hibi (1999))

以下のようなグラフを G とすると，

- 任意の単項式順序 $<$ に対して，$\sqrt{in_<(I_{A_G})} \neq in_<(I_{A_G})$
- A_G は unimodular な三角形分割を持つ。



整数計画問題の例

Example (CLO, “Using algebraic geometry" 第 8 章)

A 社から，1 個あたり 400 kg, 2 m^3
B 社から，1 個あたり 500 kg, 3 m^3
の荷物を運んで欲しいと依頼された。
1 個あたりの報酬は A 社が 11 ドル，B 社が 15 ドルである。
所有するトラックには，3700 kg, 20 m^3 まで載せられる。
利益を最大にするには，それぞれから何個ずつ請け負えばよいか？

制約条件 $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4A & + & 5B & \leq & 37 \\ 2A & + & 3B & \leq & 20 \\ & & A, B & \geq & 0 \end{array}\right.$ のもと，

$11A + 15B$ を最大にするような整数 A, B を求めよ。

整数計画問題の例

Example (CLO, “Using algebraic geometry" 第 8 章)

A 社から，1 個あたり 400 kg, 2 m^3
B 社から，1 個あたり 500 kg, 3 m^3
の荷物を運んで欲しいと依頼された。
1 個あたりの報酬は A 社が 11 ドル，B 社が 15 ドルである。
所有するトラックには，3700 kg, 20 m^3 まで載せられる。
利益を最大にするには，それぞれから何個ずつ請け負えばよいか？

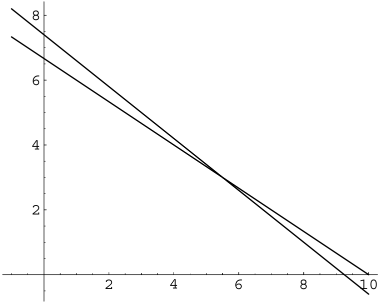
制約条件 $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4A & + & 5B & \leq & 37 \\ 2A & + & 3B & \leq & 20 \\ & & A, B & \geq & 0 \end{array}\right.$ のもと，

$11A + 15B$ を最大にするような**整数** A, B を求めよ。

整数計画問題の例

制約条件 $\left\{\begin{array}{rcrcr} 4A & + & 5B & \leq & 37 \\ 2A & + & 3B & \leq & 20 \\ & & A, B & \geq & 0 \end{array}\right.$ **のもと，**

$11A + 15B$ **を最大にするような整数** A, B **を求めよ。**



整数計画問題の例

$$\begin{cases} 4A + 5B \leq 37 \\ 2A + 3B \leq 20 \\ A, B \geq 0 \end{cases}$$ のもと，

$11A + 15B$ を最大にするような整数 A, B を求めよ。

$\downarrow$ 標準化

$$\begin{cases} 4A + 5B + C = 37 \\ 2A + 3B + D = 20 \\ A, B, C, D \geq 0 \end{cases}$$ のもと，

$-11A - 15B$ を最小にするような整数 A, B, C, D を求めよ。

整数計画問題の例

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 4A & + & 5B & \leq & 37 \\ 2A & + & 3B & \leq & 20 \\ & & A, B & \geq & 0 \end{array}\right.$$ **のもと，**

$11A + 15B$ **を最大にするような整数** A, B **を求めよ。**

$\downarrow$ **標準化**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 4A & + & 5B & + & C & & & = & 37 \\ 2A & + & 3B & & & + & D & = & 20 \\ & & & & A, B, & & C, D & \geq & 0 \end{array}\right.$$ **のもと，**

$-11A - 15B$ **を最小にするような整数** A, B, C, D **を求めよ。**

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ で定義される単項式順序に関する I_A のグレブナー基底は

$$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす。
そこで，$x_3^{37} x_4^{20}$ をこのグレブナー基底で割り算すると，
余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。
よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，
重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ で定義される
単項式順序に関する I_A のグレブナー基底は

$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす。
そこで，$x_3^{37} x_4^{20}$ をこのグレブナー基底で割り算すると，
余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。
よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ で定義される単項式順序に関する I_A のグレブナー基底は

$$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす。

そこで，$x_3^{37} x_4^{20}$ をこのグレブナー基底で割り算すると，余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。

よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ で定義される単項式順序に関する I_A のグレブナー基底は

$$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす。

そこで，$x_3^{37} x_4^{20}$ をこのグレブナー基底で割り算すると，余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。

よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ で定義される
単項式順序に関する I_A のグレブナー基底は

$$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす。
そこで，$x_3^{37} x_4^{20}$ をこのグレブナー基底で割り算すると，
余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。
よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.
答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ **で定義される単項式順序に関する** I_A **のグレブナー基底は**

$$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ **は明らかに制約条件をみたす。**

そこで， $x_3^{37} x_4^{20}$ **をこのグレブナー基底で割り算すると，**

余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ **である。**

よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ **で定義される単項式順序に関する** I_A **のグレブナー基底は**

$$\{x_3^4x_4^2 - x_1, x_2x_3^3x_4 - x_1^2, x_1x_3x_4 - x_2, x_1^4x_4 - x_2^3x_3, x_2^2x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ **は明らかに制約条件をみたす。**

そこで， $x_3^{37}x_4^{20}$ **をこのグレブナー基底で割り算すると，余りは** $x_1^4x_2^4x_3$ **である。**

よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

Conti–Traverso アルゴリズム

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，
重み $\mathbf{w} = (-11, -15, 0, 0) + 2 \cdot (6, 8, 1, 1)$ で定義される
単項式順序に関する I_A のグレブナー基底は

$$\{x_3^4 x_4^2 - x_1, x_2 x_3^3 x_4 - x_1^2, x_1 x_3 x_4 - x_2, x_1^4 x_4 - x_2^3 x_3, x_2^2 x_3^2 - x_1^3\}$$

$(A, B, C, D) = (0, 0, 37, 20)$ は明らかに制約条件をみたす。
そこで，$x_3^{37} x_4^{20}$ をこのグレブナー基底で割り算すると，
余りは $x_1^4 x_2^4 x_3$ である。
よって，最適解（の１つ）は $(A, B, C, D) = (4, 4, 1, 0)$.

答：A 社から 4 個，B 社から 4 個請け負えばよい。

分割表

5×5 **分割表：**

代数 \ 統計	5	4	3	2	1	計
5	2	1	1	0	0	4
4	8	3	3	0	0	14
3	0	2	1	1	1	5
2	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	0	1	1
計	10	6	5	2	3	26

●代数と統計の成績には関連はあるのか？

マルコフ連鎖モンテカルロ法

マルコフ連鎖モンテカルロ法

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \;\middle|\; \begin{array}{ccccc|c} & & & & & 4 \\ & & & & & 14 \\ & & t_{ij} & & & 5 \\ & & & & & 2 \\ & & & & & 1 \\ \hline 10 & 6 & 5 & 2 & 3 & 26 \end{array} \;,\quad 0 \le t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

F 上をランダムウォークして，F の元をサンプリングし，統計量を計算することによって分析する。
（この場合，$\sharp|F| = 229,174$ である。）

マルコフ連鎖モンテカルロ法

マルコフ連鎖モンテカルロ法

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \;\middle|\; \begin{array}{ccccc|c} & & & & & 4 \\ & & & & & 14 \\ & & t_{ij} & & & 5 \\ & & & & & 2 \\ & & & & & 1 \\ \hline 10 & 6 & 5 & 2 & 3 & 26 \end{array}, \quad 0 \leq t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

F 上をランダムウォークして，F の元をサンプリングし，統計量を計算することによって分析する。（この場合，$\sharp|F| = 229,174$ である。）

マルコフ連鎖モンテカルロ法

●行和，列和がゼロであるような行列を有限個用意し，
それを足したり引いたりすることによって，
F 上をランダムウォークする。

●例えば，($\sum \alpha_i = \sum \beta_j$ をみたす α_i, β_j を固定したとき)

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \;\middle|\; \begin{array}{ccc|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \alpha_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \alpha_2 \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array}, \quad 0 \le t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$ に対して，

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の元を足したり引いたりすることで
F の任意の 2 元は F の元を経由して移り合える。
このような M をマルコフ基底という。

マルコフ連鎖モンテカルロ法

●行和，列和がゼロであるような行列を有限個用意し，
それを足したり引いたりすることによって，
F 上をランダムウォークする。
●例えば，($\sum \alpha_i = \sum \beta_j$ をみたす α_i, β_j を固定したとき)

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \;\middle|\; \begin{array}{ccc|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \alpha_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \alpha_2 \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array}, \quad 0 \le t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$ に対して，

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の元を足したり引いたりすることで
F の任意の 2 元は F の元を経由して移り合える。
このような M を**マルコフ基底**という。

マルコフ連鎖モンテカルロ法

●行和，列和がゼロであるような行列を有限個用意し，
それを足したり引いたりすることによって，
F 上をランダムウォークする。
●例えば，($\sum \alpha_i = \sum \beta_j$ をみたす α_i, β_j を固定したとき)

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \;\middle|\; \begin{array}{ccc|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \alpha_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & \alpha_2 \\ \hline \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{array}, \quad 0 \leq t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$
に対して，

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の元を足したり引いたりすることで
F の任意の 2 元は F の元を経由して移り合える。
このような M を**マルコフ基底**という。

マルコフ基底とトーリックイデアル

Example (再掲)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} + t_{12} + t_{13} \\ t_{21} + t_{22} + t_{23} \\ t_{11} + t_{21} \\ t_{12} + t_{22} \\ t_{13} + t_{23} \end{pmatrix}$$

$$I_A = \langle x_1 x_5 - x_2 x_4, \quad x_1 x_6 - x_3 x_4, \quad x_2 x_6 - x_3 x_5 \rangle$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

マルコフ基底とトーリックイデアル

Example (再掲)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}t_{11}\\t_{12}\\t_{13}\\t_{21}\\t_{22}\\t_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_{11}+t_{12}+t_{13}\\t_{21}+t_{22}+t_{23}\\t_{11}+t_{21}\\t_{12}+t_{22}\\t_{13}+t_{23}\end{pmatrix}$$

$$I_A=\langle x_1x_5-x_2x_4,\quad x_1x_6-x_3x_4,\quad x_2x_6-x_3x_5\rangle$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

Diaconis–Sturmfels

Theorem (Diaconis–Sturmfels)

行和，列和がゼロであるような有限個の行列が
マルコフ基底となるための必要十分条件は，
対応する 2 項式の集合が，I_A の生成系をなすことである。

- 2 元表に対応する I_A が 2 次の 2 項式で生成されることは well-known.
- 3 元以上の表に対しては,（いくつかのクラスを除いて）I_A の生成系は未解明であり，計算困難である。

S. Aoki and A. Takemura
The list of indispensable moves of the unique minimal Markov basis for 3x4xK and 4x4x4 contingency tables with fixed two-dimensional marginals
METR Technical Report, 03-38 (November 2003).

Diaconis–Sturmfels

Theorem (Diaconis–Sturmfels)

行和，列和がゼロであるような有限個の行列がマルコフ基底となるための必要十分条件は，対応する 2 項式の集合が，I_A の生成系をなすことである。

- 2 元表に対応する I_A が 2 次の 2 項式で生成されることは well-known.
- 3 元以上の表に対しては，(いくつかのクラスを除いて) I_A の生成系は未解明であり，計算困難である。

S. Aoki and A. Takemura
The list of indispensable moves of the unique minimal Markov basis for 3x4xK and 4x4x4 contingency tables with fixed two-dimensional marginals
METR Technical Report, 03-38 (November 2003).

Diaconis–Sturmfels

Theorem (Diaconis–Sturmfels)

行和，列和がゼロであるような有限個の行列がマルコフ基底となるための必要十分条件は，対応する 2 項式の集合が，I_A の生成系をなすことである。

- **2 元表に対応する I_A が 2 次の 2 項式で生成されることは** well-known.
- **3 元以上の表に対しては，（いくつかのクラスを除いて）I_A の生成系は未解明であり，計算困難である。**

S. Aoki and A. Takemura
The list of indispensable moves of the unique minimal Markov basis for 3x4xK and 4x4x4 contingency tables with fixed two-dimensional marginals
METR Technical Report, 03-38 (November 2003).

分割表に付随する配置

$r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_\ell$ 分割表（$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_\ell \geq 2$）

$$T = (t_{i_1 i_2 \cdots i_\ell})_{i_k = 1,2,\ldots,r_k}, \quad 0 \leq t_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} \in \mathbb{Z}$$

に対しては，以下のようなベクトル全体からなる配置 $A_{r_1 r_2 \cdots r_\ell}$ が対応する：

$$\mathbf{e}^{(1)}_{i_2 i_3 \cdots i_\ell} \oplus \mathbf{e}^{(2)}_{i_1 i_3 \cdots i_\ell} \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}^{(\ell)}_{i_1 i_2 \cdots i_{\ell-1}}$$

ただし，各 i_k は $\{1, 2, \ldots, r_k\}$ に属し，$\mathbf{e}^{(k)}_{i_1 \cdots i_{k-1} i_{k+1} \cdots i_\ell}$ は $\mathbb{R}^{r_1 \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_\ell}$ の単位座標ベクトルである。

分割表に付随する配置

$r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_\ell$ **分割表**（$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_\ell \geq 2$）

$$T = (t_{i_1 i_2 \cdots i_\ell})_{i_k = 1,2,\ldots,r_k}\,, \quad 0 \leq t_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} \in \mathbb{Z}$$

に対しては，以下のようなベクトル全体からなる配置 $A_{r_1 r_2 \cdots r_\ell}$ が対応する：

$$\mathbf{e}^{(1)}_{i_2 i_3 \cdots i_\ell} \oplus \mathbf{e}^{(2)}_{i_1 i_3 \cdots i_\ell} \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}^{(\ell)}_{i_1 i_2 \cdots i_{\ell-1}}$$

ただし，各 i_k は $\{1, 2, \ldots, r_k\}$ に属し，$\mathbf{e}^{(k)}_{i_1 \cdots i_{k-1} i_{k+1} \cdots i_\ell}$ は $\mathbb{R}^{r_1 \cdots r_{k-1} r_{k+1} \cdots r_\ell}$ の単位座標ベクトルである。

$$
\begin{array}{cc}
A_{222} &
\begin{array}{cccccccc}
\bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \times & \times & \times & \times \\
\bigcirc & \bigcirc & \times & \times & \bigcirc & \bigcirc & \times & \times \\
\bigcirc & \times & \bigcirc & \times & \bigcirc & \times & \bigcirc & \times
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\bigcirc\bigcirc \\ \bigcirc\times \\ \times\bigcirc \\ \times\times \\ \hline
\bigcirc\bigcirc \\ \bigcirc\times \\ \times\bigcirc \\ \times\times \\ \hline
\bigcirc\bigcirc \\ \bigcirc\times \\ \times\bigcirc \\ \times\times
\end{array} &
\left(
\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & 1 \\ \hline
1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 \\ \hline
1 & & 1 & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1
\end{array}
\right)
\end{array}
$$

分類

Classification

$r_1 \times r_2$ $r_1 \times r_2 \times 2 \times \cdots \times 2$	*unimodular*
$r_1 \times 3 \times 3$	*compressed, not unimodular*
$5 \times 5 \times 3$ $5 \times 4 \times 3$ $4 \times 4 \times 3$	*normal* (`4ti2 & Normaliz`) *not compressed*
otherwise, i.e., $\ell \geq 4$ *and* $r_3 \geq 3$ $\ell = 3$ *and* $r_3 \geq 4$ $\ell = 3,\ r_3 = 3,\ r_1 \geq 6$ *and* $r_2 \geq 4$	*not normal*

ネストされた配置

Algebras of Veronese type (2 次のグレブナー基底)

↓

Segre–Veronese 配置 (2 次のグレブナー基底)
(O–Hibi 2000)

↓

改良型 Segre–Veronese 配置 (2 次のグレブナー基底)
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2010)

↓

ネストされた配置
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2008, O–Hibi 2010)

ネストされた配置

Algebras of Veronese type (2 **次のグレブナー基底**)

↓

Segre–Veronese **配置** (2 **次のグレブナー基底**)
(O–Hibi 2000)

↓

改良型 Segre–Veronese **配置** (2 **次のグレブナー基底**)
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2010)

↓

ネストされた配置
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2008, O–Hibi 2010)

ネストされた配置

Algebras of Veronese type (2 **次のグレブナー基底**)

↓

Segre–Veronese **配置** (2 **次のグレブナー基底**)
(O–Hibi 2000)

↓

改良型 Segre–Veronese **配置** (2 **次のグレブナー基底**)
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2010)

↓

ネストされた配置
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2008, O–Hibi 2010)

ネストされた配置

Algebras of Veronese type (2 次のグレブナー基底)

$\downarrow$

Segre–Veronese **配置** (2 次のグレブナー基底)
(O–Hibi 2000)

$\downarrow$

改良型 Segre–Veronese **配置** (2 次のグレブナー基底)
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2010)

$\downarrow$

ネストされた配置
(Aoki–Hibi–O–Takemura 2008, O–Hibi 2010)

ネストされた配置

$K[A] \subset K[t_1, \ldots, t_d]$ (簡単のため，各 $T^{\mathbf{a}_i}$ の次数は r とする)

各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，

$K\left[u_1^{(i)}, \ldots, u_{\mu_i}^{(i)}\right]$: μ_i 変数多項式環

$K[B_i] = K\left[m_1^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}\right] \subset K\left[u_1^{(i)}, \ldots, u_{\mu_i}^{(i)}\right]$

$$\begin{aligned} & K[A(B_1, \ldots, B_d)] \\ := \quad & K\left[m_{j_1}^{(i_1)} \cdots m_{j_r}^{(i_r)} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_{i_1} \cdots t_{i_r} \in \{T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}\} \\ 1 \le j_k \le \lambda_{i_k} \text{ for } 1 \le k \le r \end{array} \right] \end{aligned}$$

で定義される配置 $A(B_1, \ldots, B_d)$ を
$A, B_1, \ldots, B_d$ に付随する**ネストされた配置**という。

ネストされた配置

$K[A] \subset K[t_1, \ldots, t_d]$ (簡単のため，各 $T^{\mathbf{a}_i}$ の次数は r とする)

各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，

$K\left[u_1^{(i)}, \ldots, u_{\mu_i}^{(i)}\right]$: μ_i 変数多項式環

$K[B_i] = K\left[m_1^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}\right] \subset K\left[u_1^{(i)}, \ldots, u_{\mu_i}^{(i)}\right]$

$$\begin{aligned} & K[A(B_1, \ldots, B_d)] \\ := \quad & K\left[m_{j_1}^{(i_1)} \cdots m_{j_r}^{(i_r)} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_{i_1} \cdots t_{i_r} \in \{T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}\} \\ 1 \le j_k \le \lambda_{i_k} \text{ for } 1 \le k \le r \end{array} \right] \end{aligned}$$

で定義される配置 $A(B_1, \ldots, B_d)$ を
$A, B_1, \ldots, B_d$ に付随するネストされた配置という。

ネストされた配置

$K[A] \subset K[t_1, \ldots, t_d]$ (簡単のため，各 $T^{\mathbf{a}_i}$ の次数は r とする)
各 $i = 1, 2, \ldots, d$ に対して，

$K\left[u_1^{(i)}, \ldots, u_{\mu_i}^{(i)}\right]$: μ_i 変数多項式環

$$K[B_i] = K\left[m_1^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}\right] \subset K\left[u_1^{(i)}, \ldots, u_{\mu_i}^{(i)}\right]$$

$$\begin{aligned} & K[A(B_1, \ldots, B_d)] \\ := \quad & K\left[m_{j_1}^{(i_1)} \cdots m_{j_r}^{(i_r)} \;\middle|\; \begin{array}{l} t_{i_1} \cdots t_{i_r} \in \{T^{\mathbf{a}_1}, \ldots, T^{\mathbf{a}_n}\} \\ 1 \le j_k \le \lambda_{i_k} \text{ for } 1 \le k \le r \end{array} \right] \end{aligned}$$

で定義される配置 $A(B_1, \ldots, B_d)$ を
$A, B_1, \ldots, B_d$ に付随する**ネストされた配置**という。

ネストされた配置

- $I_A, I_{B_1}, \ldots, I_{B_d}$ のグレブナー基底から，$I_{A(B_1,\ldots,B_d)}$ のグレブナー基底を構成できる。
- $K[A], K[B_1], \ldots, K[B_d]$ が正規ならば，$K[A(B_1, \ldots, B_d)]$ は正規だが，逆は必ずしも成り立たない。

S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura
Gröbner bases of nested configurations
J. Algebra, **320** (2008) no. 6, 2583 – 2593.

H. Ohsugi and T. Hibi
Toric rings and ideals of nested configurations
J. commutative algebra, **2** (2010), 187 – 208.

ネストされた配置

- $I_A, I_{B_1}, \ldots, I_{B_d}$ のグレブナー基底から，$I_{A(B_1,\ldots,B_d)}$ のグレブナー基底を構成できる。
- $K[A], K[B_1], \ldots, K[B_d]$ が正規ならば，$K[A(B_1, \ldots, B_d)]$ は正規だが，逆は必ずしも成り立たない。

S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura
Gröbner bases of nested configurations
J. Algebra, **320** (2008) no. 6, 2583 – 2593.

H. Ohsugi and T. Hibi
Toric rings and ideals of nested configurations
J. commutative algebra, **2** (2010), 187 – 208.

ネストされた配置

- $I_A, I_{B_1}, \ldots, I_{B_d}$ のグレブナー基底から，$I_{A(B_1,\ldots,B_d)}$ のグレブナー基底を構成できる。
- $K[A], K[B_1], \ldots, K[B_d]$ が正規ならば，$K[A(B_1, \ldots, B_d)]$ は正規だが，逆は必ずしも成り立たない。

S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura
Gröbner bases of nested configurations
J. Algebra, **320** (2008) no. 6, 2583 – 2593.

H. Ohsugi and T. Hibi
Toric rings and ideals of nested configurations
J. commutative algebra, **2** (2010), 187 – 208.

プロジェクト

科学技術振興機構

戦略的創造研究推進事業 CREST

領域　“数学と諸分野の共働によるブレークスルーの探索"

研究課題　“現代の産業社会とグレブナー基底の調和"

(代表 日比孝之, 2008 年 10 月 〜 2014 年 3 月)