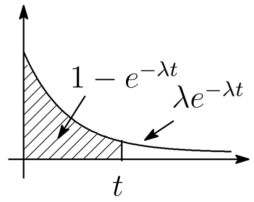
自己相似 Fragmentation 連鎖の極限定理について

千代延研究室　外村真也

パラメータ λ の指数分布

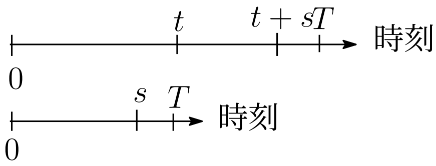
ある場所に降ってくる雨についての過程を考える. 一粒目の雨が降る時刻を T とする.



$$P(T \leqq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}$$

『lack of memory』

時刻 t で雨が降らない条件の下で時刻 $t+s$ でも雨が降らない確率と, 時刻 s で雨が降らない確率は同じ.

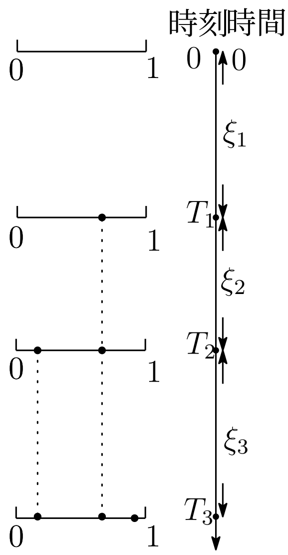


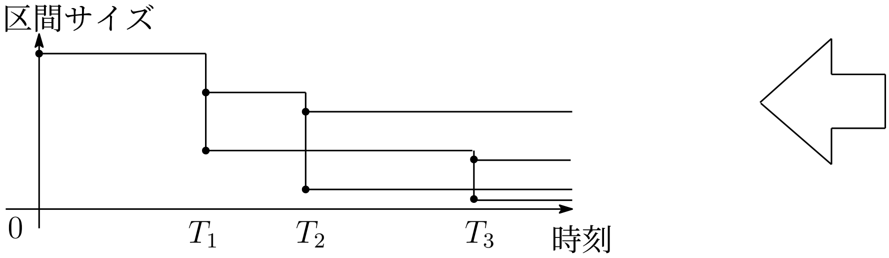
$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

この性質により指数分布の確率過程がマルコフ過程であることが保障される.

ポアソンの雨 (Poassonian rain)

自己相似 Fragmentation 連鎖とは粒子系分枝確率過程の特別なあるクラスである.『**ポアソンの雨**』が最も典型的な例である.$[0,1]$ 区間内に, 場所については一様に, 時間に関しては指数時間に従って雨が降るとする. すなわち ξ_i(雨が落ちる時間間隔) をパラメータ 1 の指数分布に従う独立同分布な確率変数とし,T_i を i 番目に雨が落ちた時刻とする. 時刻 t までに n 粒雨が降ったとするとその雨粒によって $[0,1]$ 区間は $n+1$ 個の区間に分割される. その区間の大きさを大きい順に並べたものを $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_{n+1}(t), 0, 0, \cdots)$ とすると, 確率過程 $X = \{X(t), t \geqq 0\}$ は自己相似 Fragmentation 連鎖の一つの例である.





自己相似 Fragmentation 連鎖のモデル説明

ある $\alpha \in \mathbb{R}$ と, ν を粒子達の配置空間 $S^{\downarrow} = \{s = (s_1, s_2, \cdots); 1 \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \cdots \geqq 0, \lim_{i\to\infty} s_i = 0\}$ 上の有限測度とする. この確率過程の法則はこの α と ν から次のように一意に定まる.

- スタートは 1 つのサイズ 1 の粒子から始める.
- パラメータ $\nu(S^{\downarrow})$ の指数時間で死ぬ.

- 死ぬと同時に (無限個を許す個数の) 粒子を生む. 自分の親よりも大きなサイズの粒子は生まれない.
- 子供粒子の配置法則は $\nu(\cdot)/\nu(S^{\downarrow})$ で定まる. 簡単に書くと $A \subset S^{\downarrow}$ に対して $P((1,0,\cdots) \to s \in A) = \nu(A)/\nu(S^{\downarrow})$ のことである.

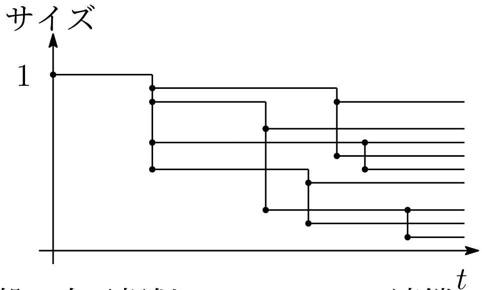
またサイズ x にある粒子について, $\nu_x(A) = x^{\alpha}\nu(x^{-1}A) \ \ (\nu_1 = \nu)$ とする.

- それぞれの粒子のふるまいは互いに独立.
- サイズ x の粒子はパラメータ $\nu_x(S^{\downarrow})(= x^{\alpha}\nu(S^{\downarrow}))$ のポアソン時間で死ぬ.
- 死ぬと同時に (無限個を許す個数の) 粒子を生む. 自分の親よりも大きなサイズの粒子は生まれない.
- 子供粒子の配置確率は $\nu_x(A)/\nu(S^{\downarrow}) = \nu(x^{-1}A)/\nu(S^{\downarrow})$ で定まる.

全ての粒子に対して以上の事が繰り返される.

この様に作った確率過程を**自己相似レート** α **, 位置測度** ν **の自己相似 fragmentation 連鎖**と呼ぶ. この α はサイズに関する粒子が死ぬまでの比を表していて,ν は生まれる配置法則を表している.

本論文では粒子の大きさには関係なく一様な速さで分裂が起こる場合 $(\alpha = 0)$ と大きな粒子のほうが早く分裂しやすい場合 $(\alpha > 0)$ について, 時間を無限大にした時の連鎖の漸近挙動はラフに言って次のようになる.$\alpha = 0$ についてのより詳しい命題は後に述べる.



一般の自己相似 Fragmentation 連鎖の例

$\alpha = 0$ のときサイズの自然対数は $O(t^{-1})$ のオーダーで減少する.
$\alpha > 0$ のときサイズは $O(t^{-1/\alpha})$ のオーダーで減少する.

ポアソンの雨
ポアソンの雨の場合について ν, α を調べる.

$\nu((1-V, V, 0, 0, \cdots)) = P((1,0,\cdots) \to (1-V, V, 0, \cdots))$, ただし V は [0,1/2] 上の一様分布である.

長さ x の区間に落ちるまでの時間を調べる.$[0,1]$ 区間には平均時間 1 で落ちたので, 長さ x の区間に落ちるまでの時間平均は $1/x$ になる. よって $1/\nu_x(S^{\downarrow}) = 1$ より $\alpha = 1$ がわかる.

マルサス指数 ある $\underline{\mathrm{p}} \in \mathbb{R}$ が存在し, 任意の $p > \underline{\mathrm{p}}$ に対して 0 をもつ, 単調増加関数

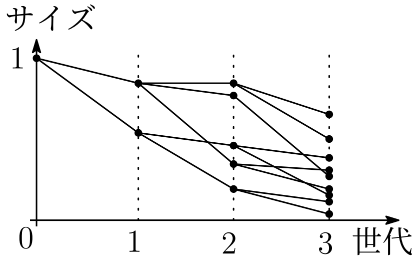
$$\kappa(p) = \int_{S^{\downarrow}} (1 - \sum_{i=1}^{\infty} s_i^p)\nu(ds)$$

また $p^* : \kappa(p) = 0$ を**マルサス指数**と呼ぶ.
ポアソンの雨の場合, $\kappa(p) = (1-p)/(1+p),\ p^* = 1$ となる.

命題

$$\mathcal{M}_n = \sum_{|u|=n} \xi^{p^*},\ \mathcal{M}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_n$$

と仮定すると, $\mathcal{M}_n$ は一様可積分なマルチンゲールであり, マルチンゲール収束定理より $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_\infty \quad P-a.s.$ となる. ポアソンの雨の場合は $\mathcal{M}_n = 1$ である.



$\alpha = 0$ **の定理**

定理 3.1 $\alpha = 0, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続な有界関数とすると以下が成立する.
(i) ある $p > 1$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{p^*}(t) f\left(\frac{\ln X_i(t)}{t}\right) = \mathcal{M}_\infty f(-\kappa'(p^*)), \quad \text{in } L^p(\mathbb{P})$$

(ii) $\mathcal{N}(0, -\kappa''(p^*))$ を平均 0, 分散 $-\kappa''(p^*)$ のガウス分布とすると, ある $p > 1$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{p^*}(t) f\left(t^{-\frac{1}{2}}(\ln X_i(t) + \kappa'(p^*)t)\right) = \mathcal{M}_\infty \mathbb{E}(f(\mathcal{N}(0, -\kappa''(p^*))) \quad \text{in } L^p(\mathbb{P})$$

が成立する.

χ をある自然な法則によりランダムに選んだ枝, $\chi(t)$ をその枝の時刻 t での粒子のサイズとする.

定理 3.5
大数の法則

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \chi(t)}{t} = -\kappa'(p^*), \quad \text{in } L^p(\mathbb{P}^*)$$

が成立する. また中心極限定理

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\left(\frac{1}{t}\ln \chi(t) + \kappa'(p^*)\right) = N(0, -\kappa''(p^*)), \quad \text{in } L^p(\mathbb{P}^*)$$

が成立する.

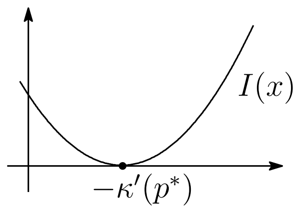
最後に大偏差原理の結果について述べる．大数の法則によればいわゆるサンプル平均はもとの期待値に確率 1 で収束する．したがってサンプル平均が期待値と真に離れた値にいる確率は 0 に収束する．その収束スピードが指数オーダーである時，大偏差原理が成立するという．定理 3.5 よりドミナンス D_φ と大偏差レート $I(x)$ は

$$
\begin{aligned}
D_\varphi &= \{\theta : -\kappa(\theta + p^*) < \infty\} \\
I(x) &= \sup_\theta [\theta x + \kappa(\theta + p^*)]
\end{aligned}
$$

で与えられる．

命題

$I(x)$ についての性質を二つ述べる．すなわち $I(x)$ は図のようになっている．



1.

$$I(x) \geqq 0$$

を満たす下半連続な下凸関数である．

2.

$$I(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\kappa(p^*)$$

定理 3.6 主定理

実数上任意の区間 $a, b (a < b)$ において

1.$[a, b] \cap D_\varphi \neq \emptyset$ ならば

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln P\left(\frac{\ln \chi(t)}{t} \in [a, b]\right) \leqq -\inf_{x\in[a,b]} I(x)$$

2.$(a, b) \subset -\kappa'(D_\varphi)$ が成立しているならば

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{t} \ln P\left(\frac{\ln \chi(t)}{t} \in (a, b)\right) \geqq -\inf_{x\in(a,b)} I(x)$$

を得る．

文献 J.Bertoin, Random Fragmentation and Coagulation Process, 2006