2011 年度　修士論文要旨

後戻りを許した秘書問題における最適戦術

関西学院大学大学院　理工学研究科

数理科学専攻　千代延研究室　　西本 考宏

本論文では，最適停止問題*（Optimal Stopping Problem）の中で重要な位置を占める**古典的秘書問題**（Classical Secretary Problem）を紹介し，「直前に見た応募者には，後戻りできる」ように設定を変更した場合の「最適戦術」や「最良選択ができる確率」について研究した結果を報告する．

1　古典的秘書問題

具体的には，次のようなものである．

- ある企業が，1 人の秘書を探している．
- N 人の応募者は，ランダムに訪れる．
- 1 人ずつ面接する度に，今までに面接した応募者の相対順位に基づき，採用するか否かを決めなければならない．
- 不採用にした応募者を，後から採用することはできない．

このとき，最良の応募者を選ぶ確率を最大にするには，どのような戦術で臨めばよいだろうか．ただし，N 人の応募者は，等確率で分布しているものとする．

この問題は，次のように確率モデルにすることができる．

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N) : \omega \in S_N\}$$

ただし，S_N は N 次対称群（$\{1, 2, \cdots, N\}$ の順列全体からなる群）とする．$\sharp\Omega = N!$ である．$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$（ω の部分集合全体）とし，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率 P を，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{N!}$$

で定め，フィルトレーションを

$$\mathcal{F}_i = \sigma(A_\sigma = \{\omega : \omega_{\sigma_1} < \omega_{\sigma_2} < \cdots < \omega_{\sigma_i}\}, \sigma \in S_i)$$

で定める．Ω の元 ω は，N 人の応募者のランク付け（ω_i は，並んでいる順で i 番目の応募者が N 人中で下から数えて何位であるかを表す）の表であり，$\mathcal{F}_i$ は，並んでいる順に 1 番目から i 番目までの応募者の相対評価の全体からなる $\sigma-$ 加法族である．$1 \leq k \leq N$ に対して，k を選んだ時に受け取る報酬を $f(k)$ と定める（k は，応募者のランク付けでの下から数えた順位を表す）．ここで，

$$f(k) = \begin{cases} 1 & (k = N) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とすれば，最良選択に当たる．$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)$ に対して，$X_n(\omega) = \omega_n$ とおくとき，問題は，

$$E[f(X_{T_0}(\omega))] = \max_{T \in \mathcal{G}} E[f(X_T(\omega))]$$

を満たす $T_0 \in \mathcal{G}$†を求めることである．

自然数 N に対して，$k_N^{(1)}$ を

$$\frac{1}{k_N^{(1)} + 1} + \cdots + \frac{1}{N-1} \leq 1,$$
$$\frac{1}{k_N^{(1)}} + \cdots + \frac{1}{N-1} > 1$$

となる自然数とすると，最適戦術は，次のようになる．

> **定理１**　**（古典的秘書問題の最適戦術）**
>
> (1)　$k_N^{(1)}$ 番目までは，すべて見送る．
>
> (2)　$k_N^{(1)} + 1$ 番目からは，今までの最良者が出たら止める．

この戦術を用いると，$N \to \infty$ のとき，最良選択ができる確率は，$\dfrac{1}{e}$ に収束する．

*最適停止問題とは，あるゲームを続けて行っているとき，どの時点でゲームをやめるとプレーヤーにとって一番「もうけ」が多いかを求める問題である．

†$\mathcal{G}$ は，停止時刻の全体（つまり，$\sigma \in \mathcal{G}$ のとき，任意の $n \in [1, N]$ に対して，$\{\omega : \sigma(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ が成り立つもの）である．

2　後戻りを許した秘書問題

「直前に見た応募者には，後戻りできる」ように設定を変更して，「最適戦術」や「最良選択ができる確率」について考察する．ここで，

$$f(k,l) = \begin{cases} 1 & (k \text{ or } l = N) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とすれば，最良選択に当たる．$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N)$ に対して，$X_{n-1}(\omega) = \omega_{n-1}$, $X_n(\omega) = \omega_n$ とおくとき，問題は，

$$E[f(X_{T_0-1}(\omega), X_{T_0}(\omega))] = \max_{T \in \mathcal{G}} E[f(X_{T-1}(\omega), X_T(\omega))]$$

を満たす $T_0 \in \mathcal{G}$ を求めることである．

自然数 N に対して，$k_N^{(2)}$ を

$$k_N^{(2)}! \left(\frac{1}{(k_N^{(2)}+1)!} + \cdots + \frac{1}{(N-1)!} \right) + \cdots + (N-2)! \left(\frac{1}{(N-1)!} \right) \leq 1,$$

$$(k_N^{(2)}-1)! \left(\frac{1}{k_N^{(2)}!} + \cdots + \frac{1}{(N-1)!} \right) + \cdots + (N-2)! \left(\frac{1}{(N-1)!} \right) > 1$$

となる自然数とすると，最適戦術は，次のようになる．

主定理２　**（後戻りを許した秘書問題の最適戦術）**

(1)　$k_N^{(2)}$ 番目までは，すべて見送る．

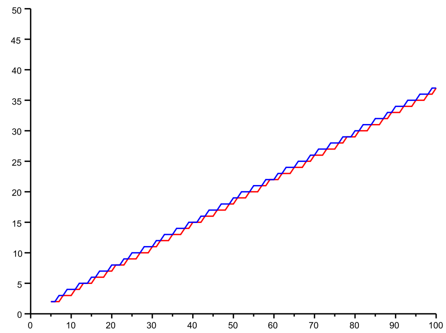
(2)　$k_N^{(2)}+1$ 番目からは，直前が今までの最良者であれば止める．

この戦術を用いると，$N \to \infty$ のとき，最良選択ができる確率は，$\dfrac{1}{e}$ に収束する．

3　Scilab によるシミュレーション

3.1　$k_N^{(1)}, k_N^{(2)}$ の変動

Scilab を使って，実際にシミュレーションを行った結果について紹介していきたいと思う．まず，$k_N^{(1)}, k_N^{(2)}$ の変動の様子を調べると，



縦軸：$k_N^{(1)}$, $k_N^{(2)}$ の値　／　横軸：人数

のようになる．この結果について，数学的な考察をする．

定理３　$k_N^{(2)} = k_N^{(1)}$ または $k_N^{(2)} = k_N^{(1)}+1$ であり，$k_N^{(1)} = \left[\frac{N}{e}\right]$ または $k_N^{(1)} = \left[\frac{N}{e}\right]+1$ となる．

(1)　$k_N^{(1)} = \left[\frac{N}{e}\right]$ のとき

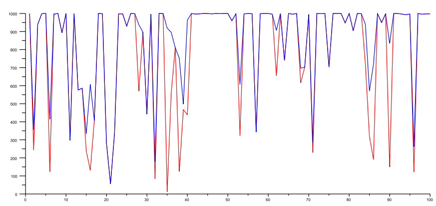
$$k_N^{(2)} = \left[\frac{N}{e}\right] \quad \text{or} \quad k_N^{(2)} = \left[\frac{N}{e}\right]+1$$

(2)　$k_N^{(1)} = \left[\frac{N}{e}\right]+1$ のとき

$$k_N^{(2)} = \left[\frac{N}{e}\right]+1 \quad \text{or} \quad k_N^{(2)} = \left[\frac{N}{e}\right]+2$$

3.2　戦術による採用者の比較

$N = 1000$ として，100 回のシミュレーションをすると，



縦軸：採用者の順位　／　横軸：試行回数

のようになる．