Gibbs Sampling による Simulated Annealing 法の画像復元問題への適用について

千代延研究室　土井　博善

論文の目的

写真などの画像データはさまざまな要因により本来の画像とは違った画像としてデータが得られる．この得られたデータから本来の画像を Makov Chain を用いた Gibbs Sampling に対する Simulated Annealing の方法を用いて推定することである．また，この論文は Pierre Bremaud 著，Makov Chains Gibbs Fields,Monte Carlo Simulation,And Queues を参考に書かれている．

画像の配置空間

次のような空間で画像を考える．

画像の配置空間：S^Λ を次のように定義する．

- $\Lambda = Z_m^2 = \{(i,j) \in Z^2,\ i,j \in [1,m]\}$：ピクセルの空間
- $S = \{+1, -1\}$：各ピクセルの値

各ピクセルの値について，+1 を黒色，−1 を白色と表すことで，白黒画像を表現する．

図 0.1: 配置空間の 1 つの配置の例

重要な前提

数学的な枠組みを考えるにあたって，得られるすべての画像の配置は (次に述べる)Gibbs 分布に従う，S^Λ 上の確率に従う確率変数の一つのサンプルである．

Gibbs Distribution

確率分布

$$\pi_T(x) = \frac{1}{Z_T} e^{-\frac{1}{T}\varepsilon(x)}$$

に従う S^Λ 上の分布を Gibbs 分布と呼ぶ．画像モデルにおけるエネルギー関数

$$\varepsilon(x) = -\frac{J}{k} \sum_{<s,t>} x(s)x(t) - \frac{H}{k} \sum_{s \in S} x(s)$$

について，$H = 0$ と仮定し，簡略化のため $\gamma = \dfrac{J}{kT}$ とすると

$$\pi(x) = \frac{1}{Z} e^{\gamma \sum_{<s,t>} x(s)x(t)} \tag{1}$$

となる．ただし，$\displaystyle\sum_{<s,t>}$ は s に対する近傍の和のことである．

Mlutiplicative noise

ノイズの基本的なモデルとして，各サイトの値が独立に入れ替わる **Mlutiplicative noise** を取り上げる．

> $Z = \{Z(s)\}_{s \in \Lambda}$ が i.i.d. かつ，Z と X が独立で，
>
> $$z(s) = \begin{cases} -1 & \text{確率 } p \\ 1 & \text{確率 } q = 1 - p \end{cases}$$
>
> であるとき，Y が
>
> $$y(s) = x(s)z(s)$$
>
> により，Y が与えられるとする．この時，Z を multiplicative noise という．

復元の方法

得られたデータ Y から

$$\pi(x|y) = P(X = x|Y = y) \tag{2}$$

を計算し，$\pi(x|y)$ を最大にする x を元画像と推定する．この考え方が **Maximun A Posteriori(MAP) likelihood method**（事後確率による最尤法）である．ここで次のことがわかっている．

- X は Gibbs 分布に従う．

- 一般的に成り立つ公式として，Bayes の公式

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(Y=y|X=x)P(X=x)}{\displaystyle\sum_x P(Y=y|X=x)P(X=x)}$$

このことを用いることで，具体的に計算していくと次の結果を得る．

定理 0.1. 画像モデルで表される画像は y：given で

$$P(X=x|Y=y)=\frac{e^{-H(x,y)}}{\displaystyle\sum_x e^{-H(x,y)}}$$

に従う．ここで

$$H(x,y)=\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}\sum_{s\in\Lambda}x(s)y(s)-\gamma\sum_{<s,t>}x(s)x(t)$$

である．

y が与えられた下で $\pi(x|y)$ を最大にする x を探したい．つまり，$H(x,y)$ を最小にする x を探す．今回はこの最小の x を探す方法として次の Gibbs Sampling に対する Simulated Annealing を考えていく．

Barker's Algorithm

Barker's Algorithm とは，一般の target distribution π を定常分布とする，マルコフ連鎖の遷移確率行列 $P=\{p_{ij}\}_{i,j\in E}$ をみつける一つの方法である．

Barker's Algorithm とは

$$p_{ij}=\begin{cases} q_{ij}\alpha_{ij} & (i\neq j) \\ 1-\displaystyle\sum_{i\neq j}p_{ij} & (i=j)\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}=\frac{\pi(i)}{\pi(j)+\pi(i)}$$

として，遷移確率行列 P を作るアルゴリズムである．

Gibbs Sampling

次のここでの目標は

$$\pi_\beta(x) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(x,y)} \tag{3}$$

を定常分布とする S^Λ 上のマルコフ連鎖を生成することである.

S^Λ 上のマルコフ連鎖を $\{X_n\}$ として次のように遷移させる.

- 1 ステップごとに 1 つのスピンを変化させる.
- $X_n = x$ から $X_{n+1} = z$ に変化するスピンを s とする.
- 変化する 1 点を一様な確率 $q_{xz} = \dfrac{1}{|\Lambda|}$ で選ぶ.
- 点 s の新しい値 $z(s)$ は確率 $P(z(s)|x(S \setminus s)) = q_{xz}\alpha_{xz}$ で変化する.

具体的に α_{xz} を計算すると

$$\alpha_{xz} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{-\beta(-\log\frac{p}{q}y(s) + 2\gamma\sum_{<s,t>} x(t))}} & z(s) = 1 \\ \\ \dfrac{e^{-\beta(-\log\frac{p}{q}y(s) + 2\gamma\sum_{<s,t>} x(t))}}{1 + e^{-\beta(-\log\frac{p}{q}y(s) + 2\gamma\sum_{<s,t>} x(t))}} & z(s) = -1 \end{cases}$$

で表される.最後に Simulated Annealing の方法を用いて $\beta \to \infty$ とすることで,$H(x,y)$ が最小になる点 x_0 を求めることである.Simulated Annealing について述べる.

Simulated Annealing を用いたシミュレーション

関数の最小値を求める方法として,Simulated Annealing の方法を用いる.

定常分布 $\pi_{\beta(n)}(x)$ について

$$\pi_{\beta(n)}(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta(n)U(x)}$$

について,$\beta(n) \to \infty$ とすると,$\pi_{\beta(n)}(x)$ は最小になる点 x_0 に収束する.

となることのより,最小になる点 x_0 を求めることができる.$\beta(n) \to \infty$ とする早さとしては,$\beta(n) = k + \rho\log(1 + n)$ とするとよい.

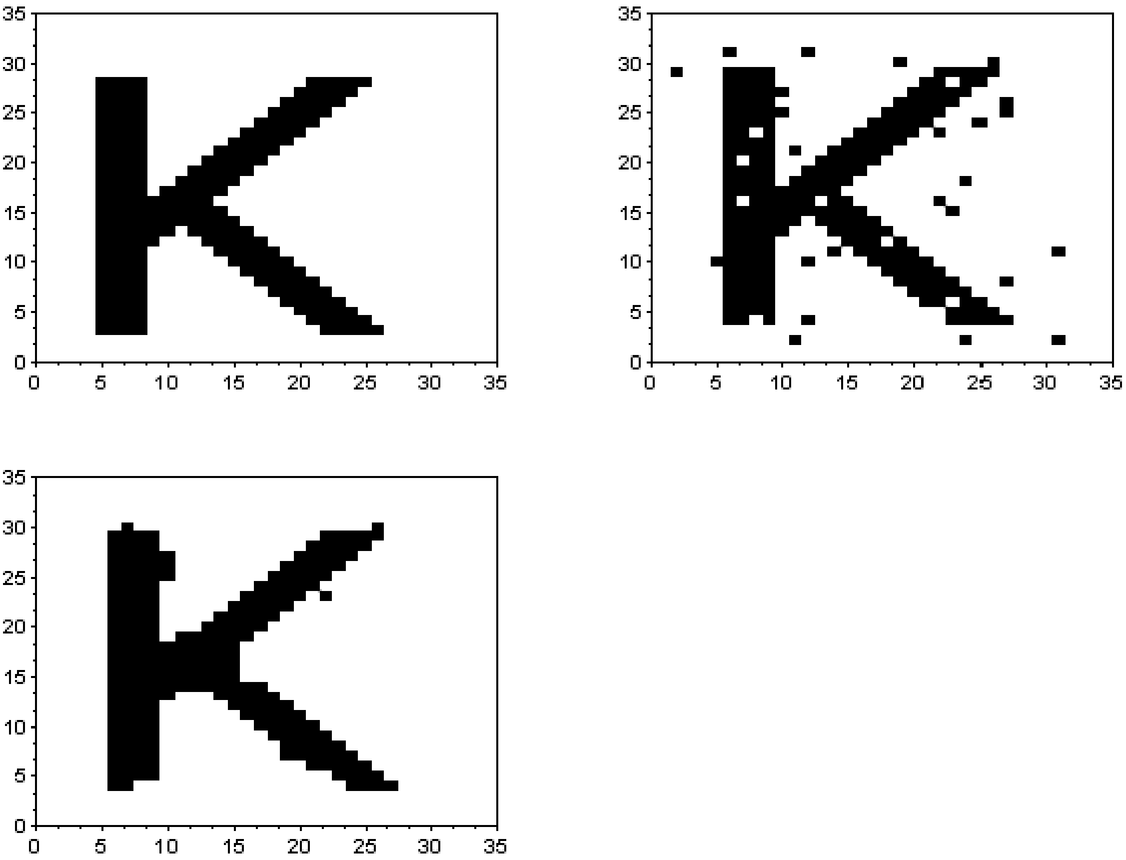

図 0.2: 画像の復元例 (イジングモデル)

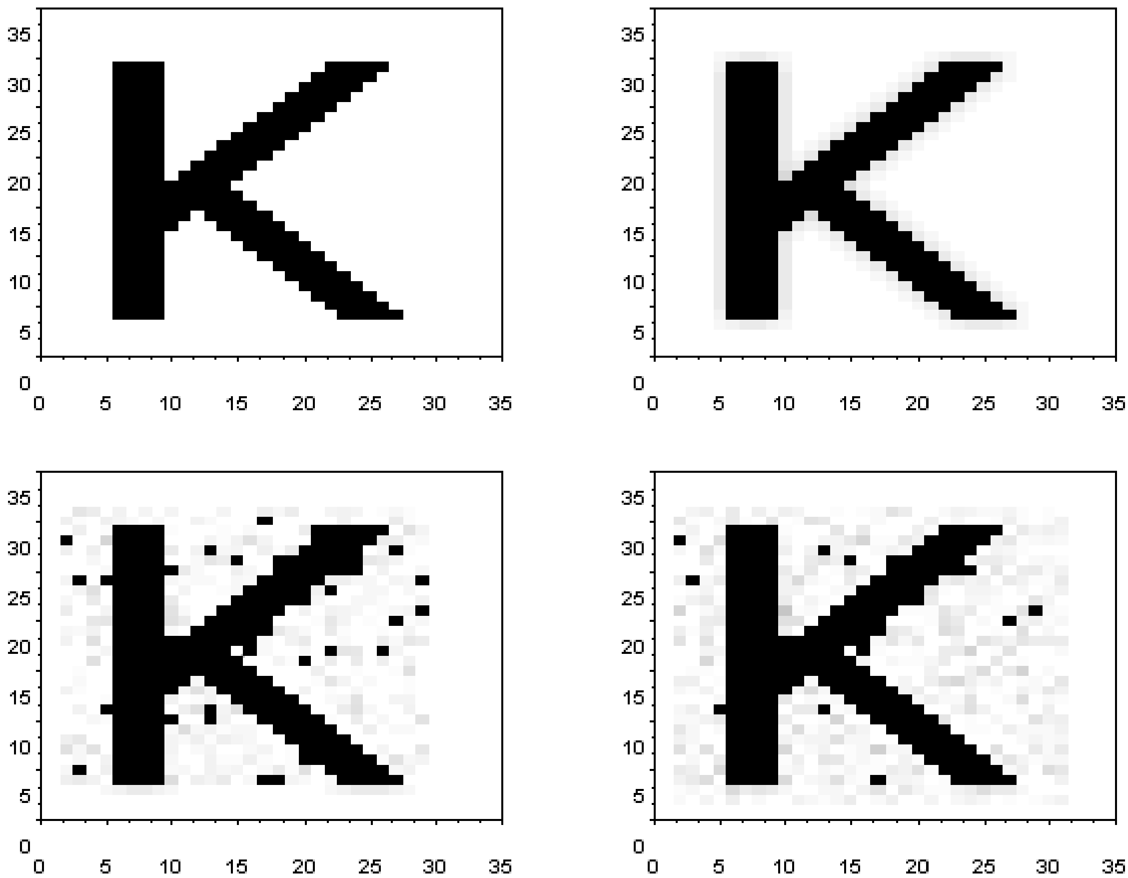

図 0.3: 画像の復元例 (Pixel-Edge Model)