1. 条件付き確率，条件付き期待値

Ex.1.1. *(無記憶性)* 幾何分布に従う確率変数 X に対して次を示せ.

$$P(X \geq m+n | X \geq m) = P(X \geq n), \qquad \forall m, n \geq 0.$$

Ex.1.2. X, Y は独立な確率変数で、それぞれ *Poisson* 分布 $Po(\lambda), Po(\mu)$ に従うとき、次を示せ.

$$P(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Ex.1.3. X, Y は独立な確率変数で、ともに幾何分布 $Ge(p)$ に従うとき、次を示せ.

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Ex.1.4. *(Partition Rule 全確率の公式)* $\{B_1, B_2, \cdots\}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の分割であるとする．すなわち，B_k 達は互いに素であり，その和集合は Ω であるとする．

(1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して全確率の公式を確かめよ: $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A|B_k)P(B_k)$.

(2) 確率変数 X に対して次をしめせ：$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} E[X|B_k]P(B_k)$.

(3) さらに，任意の $A \in \sigma\{B_1, B_2, \cdots\}$，すなわち $\{1, 2, \cdots\}$ の任意の部分集合 M に対して $A = \bigcup_{k \in M} B_k$ と表される A に対して次をしめせ：$E[X, A] = \sum_{k \in M} E[X|B_k]P(B_k)$.

Ex.1.5. A さんと B さんが $ABAB$ の順にさいころを投げ、先に *6* が出た方を勝ちとする．A さんが勝つ確率をもとめよ．*Hint:* 最初の A さんの結果によって分割する．

Ex.1.6. 表が出る確率が p のコインをくりかえし投げる．初めて表が出るまでに裏が出る回数を X とするとき，全確率の公式を用いて $E[X] = \dfrac{q}{p}$ であることを示せ．

Hint：*1* 回目の結果によって分割する．

Prop.1.7. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分加法族 (σ-field)，$\mathcal{H}$ を $\mathcal{G}$ の部分加法族であるとする．($\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.)

(1) $\mathcal{F}$-可測な確率変数 X に対して $\omega \to E[X|\mathcal{G}](\omega)$ は $\mathcal{G}$-可測な確率変数である．

(2) X が $\mathcal{G}$-可測ならば $E[X|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega),\ P-a.s.\ \omega$ である．

(3) X が $\mathcal{G}$-可測,Y が $\mathcal{F}$-可測ならば

$$E[\ XY|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega)E[\ Y|\mathcal{G}](\omega),\ P-a.s.\ \omega.$$

(4) 任意の $\mathcal{G}$-可測集合 A に対して，

$$E[\ E[X|\mathcal{G}] \cdot 1_A] = E[\ X \cdot 1_A],\quad \text{とくに，}\quad E[\ E[X|\mathcal{G}]\ ] = E[X].$$

(5) さらに，$E[\ E[X|\mathcal{G}]|\,\mathcal{H}\ ](\omega) = E[X|\,\mathcal{H}].\ P-a.s.\ \omega$

(6) X が $\mathcal{G}$ と独立ならば

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = E[X],\ P-a.s.\ \omega.$$

Ex.1.8. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(1) = \frac{1}{8}$, $P(2) = \frac{3}{8}$, $P(3) = \frac{1}{4}$, $P(4) = \frac{1}{4}$ とする．Ω 上の部分加法族 $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{G} = \{\phi, B_1, B_2, \Omega\}$，ただし $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4\}$ とする．この時,

(1) $\mathcal{G}$-確率変数 X の例をあげよ．

(2) Ω 上の確率変数 Y を $Y(1) = 2, Y(2) = -2, Y(3) = 1, Y(4) = 0$ とする．$E[Y]$ を求めよ．また，$E[Y|\mathcal{G}]$ を求め，$E[E[Y|\mathcal{G}]]$ を求めよ．

Ex.1.9. にわとりが $Po(\lambda)$ に従う個数 X の卵を産む．それぞれの卵は独立に確率 p で孵化する．孵化する卵の個数を Y とする．その時,

(1) $E[Y|X = k]$ を求めよ．ヒント：$X = k$ の下で Y の分布は?

(2) $E[XY]$ を計算し，$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ を求めよ．

(3) $E[Y^2]$ を計算し，$Var[Y]$ を求めよ．X と Y の相関係数 $\rho(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\mathrm{Var}[X]\,\mathrm{Var}[Y]} = \sqrt{p}$ を示せ.

2. マルコフ連鎖

Def.2.1. *(Markov Chain)* 実数値確率変数列 $\{X_n\}_{n=1,\cdots}$ は
$E[f(X_{n+1})|\sigma\{X_1,\cdots,X_n\}](\omega) = E[f(X_{n+1})|X_n](\omega) \qquad \forall f$ (ボレル可測関数)
が成り立つ時，マルコフ連鎖 *(Markov Chain)* であるという．特に，X_n たちが有限個の空間 $E = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ に値を取る時，すべての $i, j \in E$ に対して

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x) = P(X_{n+1} = |X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)$$

が任意の $x_1, \cdots, x_{n-1} \in E$ に対して成立する時，E 上の Markov Chain という．$p(x, y) = P(X_{n+1} = y|X_n = x)$ が n によらない時，$\{X_n\}_{n=1,\cdots}$ を *homogeneous* な *Markov Chain* という．この時 $p(x, y)$ を xy-成分とする正方行列 P を Markov Chain $\{X_n\}$ の遷移確率行列 *(transition probability matrix, stochastic matrix)* という．

Ex.2.2. $E = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の遷移確率行列を P とする．

(1) $P(X_0 = x_0,\ X_1 = x_1,\ X_2 = x_2)$ を P を用いて表せ．

(2) $P(X_2 = y|X_0 = x) = (P^2)(x, y)$ である事を示せ．右辺は行列 P^2 の xy-成分を表す．
Hint: $P(X_0 = x,\ X_2 = y) = \sum_z P(X_0 = x,\ X_1 = z,\ X_2 = y)$

(3) 初期分布 (X_0 の分布) を μ とする．すなわち $P(X_0 = x_0) = \mu(x_0), \forall x_0 \in E$ とする．その時，$P(X_1 = x_1)$ および $P(X_2 = x_2)$ を μ および P を用いて表せ．

Ex.2.3. $E = \{0, 1, 2\}$ 上，遷移確率行列が $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$ であるマルコフ連鎖の初期分布 (X_0 の分布) が $\mu = (0.2, 0.5, 0.3)$ であるとする．その時，$P(X_2 = 2|X_0 = 0)$, $P(X_0 = 1, X_2 = 2)$, $P(X_2 = 2)$ を計算せよ．

Ex.2.4. *(前進方程式)* $E = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ に対して
$\mu^{(k)} = (\mu^{(k)}(1), \cdots, \mu^{(k)}(\ell))$，ただし $\mu^{(k)}(x) = P(X_n = x)$ とする．その時，前進方程式 $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)}P$ (両辺が $1 \times n$ 行列として) が成り立つ事を示せ．

Ex.2.5. *(後退方程式)* $E = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n\}_{n=1,\cdots,N}$ に対して，適当な関数 V をとり $f^{(n)}(x) = E[V(X_N)|X_n = x]$, $1 \le n \le N$, $x \in E$ とする．この時，後退方程式 $f^{(n)} = Pf^{(n+1)}$ (両辺が $n \times 1$ 行列として) が成り立つ事を示せ．

Def.2.6. *(Random Walk)* $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ を独立同分布な実数値確率変数列とする．
$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$, $n \geq 1$ とする．

(1) $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \cdots$ により定まる確率変数列 $\{X_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を *1* 次元ランダムウォークという．

(2) 特に，$\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ の分布が $P(\xi_k = -1) = P(\xi_k = 1) = \frac{1}{2}$ によって定まる時，$\{X_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を *1* 次元対称単純ランダムウォークという．

Ex.2.7. ランダムウォークは *Markov* 連鎖である事を示せ．すなわち，$\{X_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を前定義で定まるランダムウォークであるとする．その時，任意の $x_1, \cdots, x_{n-1}$ に対して
$P[X_{n+1} = y | X_1 = x_1, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] = P[X_{n+1} = y | X_n = x]$ を示せ．

Ex.2.8. 2×2 *stochastic matrix* $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1 (= 1)$, λ_2 およびそれに対する右固有ベクトル $v_1 (= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, v_2 および左固有ベクトル u_1, u_2 を求めよ．u_1 は定常分布なので確率ベクトルとして求めよ．また，u_2, v_2 は $(u_1, v_1) = (u_2, v_2) = 1$ となるように求めよ．これを用いて P^n を求めよ．

Ex.2.9. $E = \{0, 1, 2\}$ 上，遷移確率行列が $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える．このマルコフ連鎖が 0 を出発して 0 に戻ってくる時刻 T_0 が n 以上になる確率 $P_0(T_0 \geq n)$ を計算し，それを用いて T の期待値 $E_0[T_0]$ を求めよ．
Hint: $P_0(T_0 \geq n)$ は簡単に計算できる．$E[T_0] = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(T_0 \geq n)$ である．

Ex.2.10. $E = \{0, 1, 2\}$ 上，遷移確率行列が $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える．定常分布をもとめることによりこの場合の $E_0[T_0]$ を求めよ．

Ex.2.11. $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上，遷移確率が $P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \ldots & & \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える．ただし $q = 1 - p$ とする．

(1) $p < q$ の時，定常分布 π が存在する事を示せ．π を求めよ．

(2) $p > q$ の時，マルコフ連鎖は再帰的ではない事を示せ．

<u>**3.** 動的計画法と確率動的計画法</u>

Ex.3.1. 次の例を考えよう．コイン投げを *4* 回行う．最初に *1* 円持っている人が *1* 回ごとに *0* 円または *1* 円または *2* 円を賭ける．所持金の変化を X_n とする．すなわち，$X_0 = 1$ であり，n 回賭けた後の所持金を X_n とする．所持金がなくなればそれ以降賭ける事ができないので，ある n で $X_n = 0$ であれば，すべての $\ell \geq n$ に対して $X_\ell = 0$ である．n 回目の掛け金 *(*戦略*)*ξ_n は，その時点の所持金 X_{n-1} によって決まる．どのような戦略をとれば，確率 $P(X_4 \geq 5)$ を最大にできるだろうか．戦略 $\xi = (\xi_n)$ をひとつ決めるとマルコフ連鎖 X_n の遷移確率が定まる．すなわち，$p(n, x, y, \xi) = P(X_{n+1} = y | X_n = x, \xi_n)$ である．この時，上の問題は，この場合 $N = 4$, $V(x) = 1_{\{x \geq 5\}}$ として

$$max_\xi E_\xi[V(X_N)], \quad \text{および} \quad argmax_\xi E_\xi[V(X_N)]$$

を決める問題である．ただし，E_ξ は遷移確率 $p(n, x, y, \xi)$ が定めるマルコフ連鎖に対する期待値である．

各 $n \leq N$ に対して

$$f^{(n)}(x) = \max_{\xi^{(n)}} E_\xi[V(X_N) | X_n = x]$$

とおく．ここで $\xi^{(n)}$ は，n ステップ以降における戦略である．明らかに $f^{(N)}(x) = V(x)$ である．この時，Ex.2.5 における Backward Equation(後退方程式) と同様の考え方により f_k を $k = N$ から backward に決めていく事ができる．Partition Rule および Principle of optimality より以下が成立する：

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \max_{\xi^{(n)}} E_\xi[V(X_N) | X_n = x] \\ &= \max_{\xi_n} \max_{\xi^{(n+1)}} E_\xi[V(X_N) | X_n = x] \\ &= \max_{\xi_n} \max_{\xi^{(n+1)}} \sum_y p(n, x, y, \xi_n) E_\xi[V(X_N) | X_{n+1} = y] \\ &= \max_{\xi_n} \sum_y \max_{\xi^{(n+1)}} p(n, x, y, \xi_n) E_\xi[V(X_N) | X_{n+1} = y] \\ &= \max_{\xi_n} \sum_y p(n, x, y, \xi_n) f^{(n+1)}(y). \end{aligned}$$

(1) 縦軸に x, 横軸に n をとり，上の公式に従って $f^{(n)}(x)$ の表を作れ．

(2) 特に，$f^{(0)}(1)$ を求めよ．また最適な戦略を決定せよ．

Ex.3.2. *(American Option) American Option* とは，例えば，ある設定された日から *10* 日間のいつでもある株を *150* 円で買う事ができる権利書の事である．株価 x が $x \geq 150$ である時権利を行使すると，この権利書の価値は $x - 150$ である．一方，期間内に株価は値上がりするかもしれないので，この権利書を持つ人は各日ごとにその日の株価を見て権利を行使するか否かの戦略を決める．この権利書の最初の時点での価値を，動的計画法を用いて計算してみよう．n 日目 $(0 \leq n \leq 10$ とする$)$ において株価が x 円である時の権利書の価値を $f^{(n)}(x)$ とする．

(1) 権利期間が終わる直前の時点 $n = 10$ における価値 $f^{(10)}(x)$ を x の式で表せ．

(2) n 日目に株価が x の下で権利を行使しない場合の権利書の価値を $f^{(n+1)}(x)$ を用いて表せ．

(3) *Principle of Optimality* を用いて $f^{(n)}(x)$ についての漸化式を求めよ．

Ex.3.3. 合せて *3* 店をもつスーパーマーケットが合計 *6* リットルの灯油をどの店にどれだけ在庫した場合に利益の期待値が最大になるかを考える．各店での在庫に対する利益の期待値は以下の表で与えられているものとする．

	在庫	利益の期待値 r_1		在庫	利益の期待値 r_2		在庫	利益の期待値 r_3
店 *1*	*1 litter*	*2 yen*	店 *2*	*1 litter*	*2 yen*	店 *3*	*1 litter*	*2 yen*
	2 litter	*3.1 yen*		*2 litter*	*3.25 yen*		*2 litter*	*3.4 yen*
	3 litter	*4.2 yen*		*3 litter*	*4.35 yen*		*3 litter*	*4.35 yen*

(1) 店 *2* と店 *3* に合計 x *litter* 在庫する時，各店にどれだけ在庫するかの戦略によって利益の期待値は異なる．*2* つの店からもたらされる利益の期待値のすべての戦略に対する最大値 $f_2(x)$ を r_2 および r_3 を用いて表せ．

(2) 店 *1, 2, 3* に合計 x *litter* 在庫するとき，前問同様各店にどれだけ在庫するかの戦略によって利益の期待値は異なる．これらの店からもたらされる利益の期待値の戦略上の最大値 $f_1(x)$ を，*Principle of Optimality* を用いて r_1 および f_2 を用いて表せ．

2009 確率論 2 定期試験

0.1. A さんと B さんが $ABAB$ の順にさいころを投げ、先に *6* が出た方を勝ちとする．A さんが勝つ確率をもとめよ．*Hint:* 最初の A さんの結果によって分割する．

Ex.0.2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(1) = \frac{1}{8}$, $P(2) = \frac{3}{8}$, $P(3) = \frac{1}{4}$, $P(4) = \frac{1}{4}$ とする．Ω 上の部分加法族 $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{G} = \{\phi, B_1, B_2, \Omega\}$，ただし $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{3, 4\}$ とする．この時,

(1) $\mathcal{G}$-確率変数 X の例をあげよ．

(2) Ω 上の確率変数 Y を $Y(1) = 2, Y(2) = -2, Y(3) = 1, Y(4) = 0$ とする．$E[Y]$ を求めよ．また，$E[Y|\mathcal{G}]$ を求め，$E[E[Y|\mathcal{G}]]$ を求めよ．

Ex.0.3. $E = \{0, 1, 2\}$ 上，遷移確率行列が $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$ であるマルコフ連鎖の初期分布 *(*X_0 の分布*)* が $\mu = (0.2, 0.5, 0.3)$ であるとする．その時，$P(X_2 = 2|X_0 = 0)$, $P(X_0 = 1, X_2 = 2)$, $P(X_2 = 2)$ を計算せよ．

Ex.0.4. 2×2 *stochastic matrix* $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1(=1)$, λ_2 およびそれに対する右固有ベクトル $v_1(= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, v_2 および左固有ベクトル u_1, u_2 を求めよ．u_1 は定常分布なので確率ベクトルとして求めよ．また，u_2, v_2 は $(u_1, v_1) = (u_2, v_2) = 1$ となるように求めよ．これを用いて P^n を求めよ．$0 < \alpha, \beta < 1$ の時，$\lim_{n \to \infty} P^n$ を求めよ．

Ex.0.5. $E = \{0, 1, 2\}$ 上，遷移確率行列が $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ で与えられるマルコフ連鎖を考える．このマルコフ連鎖が 0 を出発して 0 に戻ってくる時刻 T_0 が n 以上になる確率 $P_0(T_0 \geq n)$ を計算し，それを用いて T の期待値 $E_0[T_0]$ を求めよ．
Hint: $P_0(T_0 \geq n)$ は簡単に計算できる．$E[T_0] = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(T_0 \geq n)$ である．

Ex.0.6. 次の例を考えよう．コイン投げを *4* 回行う．最初に *1* 円持っている人が *1* 回ごとに *0* 円または *1* 円または *2* 円を賭ける．所持金の変化を X_n とする．すなわち，$X_0 = 1$ であり，n 回賭けた後の所持金を X_n とする．明らかに，ある n で $X_n = 0$ であれば，すべての $\ell \geq n$ に対して $X_\ell = 0$ である．n 回目の掛け金 *(*戦略*)* を ξ_n は，その時点の所持金 X_{n-1} によって決まる．どのような戦略をとれば，確率 $P(X_4 \geq 5)$ を最大にできるだろうか．