1. 離散確率空間，確率変数とその分布

Th.1.1. *(2 項係数，2 項定理)*

(1) *1* から n までの番号のついた n 枚のカードから k 枚のカードを選び出す時，その選び出し方は

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} \quad (2\text{ 項係数})$$

通りである．*(*右辺の分数において分母も分子も k 個の数の積であることに注意.*)*

(2) *2* 項定理：すべての $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Def.1.2. Ω を標本空間，$\mathcal{F}$ を事象の全体 *(*ある Ω の部分集合の集まり*)* とする．$P : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ が以下の条件をみたすとき，P を確率，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という．

(1) すべての $A \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) $P(\Omega) = 1$. *(*全事象の確率は *1.)*

(3) 有限個または可算無限個からなる事象の列 $A_1, A_2, \cdots$ が <u>たがいに排反であれば</u>

$$P\Big(\bigcup_k A_k\Big) = \sum_k P(A_k). \qquad (\text{確率の } \sigma\text{-加法性})$$

Prop.1.3. 確率 P は以下の性質をみたす.

(1) $P(\phi) = 0$. *(*空事象の確率は *0.* *)*

(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$. *(*余事象の確率*)*

(3) $A \subset B$ ならば $P(A) \leq P(B)$. *(*確率の単調性*)*

(4) *2* つの事象 A, B に対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Def.1.4. *(*確率変数とその確率分布*)*

(1) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値関数 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ を確率変数という．

(2) X のとり得る値の全体を ImX とする．各 $x \in ImX$ に対して

$$p_x = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\})$$

とおくと，$p_x \geq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{x \in ImX} p_x = 1$ である．$x \to p_x$ を X の確率分布 *(probability law)* という．

(3) 一般に，(2) で述べた性質をみたす $x \to p_x$ を離散分布という．X の確率分布が，次 Ex. に現れるようなある特定の離散分布 (例えば「幾何分布 $Ge(p)$」) であるとき,「X は幾何分布 $Ge(p)$ にしたがう」という．

Ex.1.5. 以下の対応 $\{x \to p_x\}$ が離散分布であることを示せ．

確率分布	x	p_x
1. ベルヌーイ分布 ($Be(p)$):	$x = 1,\ x = 0$	$p_1 = p,\ p_0 = 1 - p (= q)$.
2. 2 項分布 $B(n, p)$:	$x \in \{0, 1, \cdots, n\}$	$p_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$.
3. 幾何分布 $Ge(p)$:	$x \in \{0, 1, \cdots\}$	$p_x = q^x p$.
4. Poisson 分布 $Po(\lambda)$:	$x \in \{0, 1, \cdots\}$	$p_x = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$.

Prop.1.6. (反復試行=独立同試行) あるコインを投げると表 (Head) の出る確率が p(ただし $0 < p < 1$), 裏 (Tail) の出る確率が $q = 1 - p$ であるとする．このコインを n 回投げる試行を考える．k 回目の試行で表がでたら 1，裏がでたら 0 を対応させることにして，この試行の標本空間を $\Omega = \{\omega = (x_1, \cdots, x_n); x_j \in \{1, 0\}\}$ ととる．

(1) 各 $\omega = (x_1, \cdots, x_n)$ に対して $\ell = \sum_{j=1}^{n} x_j$ とすると $P(\{\omega\}) = p^\ell q^{n-\ell}$ をしめせ．

(2) Ω 上の確率変数 X を

$$X(\omega) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \omega = (x_1, \cdots, x_n)$$

とする．X は表が出る回数を表す事に注意せよ．X の確率分布は 2 項分布 $B(n, p)$ である，すなわち各 $k = 0, \cdots, n$ に対して $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$ をしめせ．

(3) Ω 上の確率変数 Y を $Y = \inf\{k; x_{k+1} = 1\}$ とする，すなわち初めて表が出るまでに裏が出る回数とする．Y の確率分布は幾何分布 $Ge(p)$ である事を示せ．

Ex.1.7. (Poisson の少数法則) 2 項分布 $B(n, p)$ の $np = \lambda$ を保ちながら $n \to \infty$ にする極限を考えると Poisson 分布 $Po(\lambda)$ が現れる，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

事象の独立性，確率変数の独立性

Def.1.8. *(条件付き確率，事象の独立性)*

(1) 事象 B が $P(B)>0$ とする時，B の下での A の条件付き確率 $P(A|B)$ を次で定義する．

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}.$$

(1) 事象 A と事象 B が独立 $\iff$ $P(A|B)=P(A)$ $\iff$ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

(2) 事象 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ が独立 $\iff$

$\{1,\cdots,n\}$ の任意の部分列 $\{i_1,\cdots,i_k\}$ に対して $P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})=P(\ A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}\ )$.

Ex.1.9. 表が出る確率が $\frac{1}{2}$ のコインを *3* 回なげる．*1* 回目と *2* 回目が同じ面である事象を A，*2* 回目と *3* 回目が同じ面である事象を B，*3* 回目と *1* 回目が同じ面である事象を C とする．A，B，C は独立か.

Def.1.10. *(確率変数列の独立性)* 確率変数列 X_1,X_2 が独立.

$\iff$ 任意の実数の部分集合 A_1,A_2 に対して事象 $\{X_1\in A_1\}$ と $\{X_2\in A_2\}$ が独立.

$\iff$ 任意の A_1,A_2 に対して $P(\ X_1\in A_1$かつ $X_2\in A_2\ )=P(\ X_1\in A_1\ )P(\ X_2\in A_2\ )$.

Prop.1.11. 確率変数列 X_1 と X_2 が独立ならば，任意の関数 f_1,f_2 に対して $f_1(X_1)$ と $f_2(X_2)$ も独立である．

Def&Prop.1.12. 一般に *2* つの確率変数 X,Y があたえられたとき，*2* 変数の関数

$$(x,y)\to p(x,y)=P(\ X=x \text{ かつ } Y=y\ )$$

を X,Y の同時確率分布 *(joint probability law)* という.

(1) $p(x,y)$ から X の確率分布 $p_X(x)$ は $p_X(x)=\sum_y p(x,y)$ によって与えられる．

(2) X と Y が独立ならばすべての x,y に対して

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

が成立する．

Ex.1.13. $\{1,0\}$ に値をとる 2 つの確率変数 X,Y に対してその同時確率分布 $p_{ij}=P(X=i,Y=j)$, $i,j=1,0$ が $p_{11}=\dfrac{1}{8}$, $\quad p_{10}=\dfrac{2}{8}$, $\quad p_{01}=\dfrac{2}{8}$, $\quad p_{00}=\dfrac{3}{8}$, であるとき，$P$ の確率分布 $P(X=i)$, $i=1,0$ を求めよ．X と Y は独立か.

Ex.1.14. A さんと B さんが *(*表の出る確率が p の*)* コインを繰り返し投げてそれぞれ初めて表がでるまでに裏が出る回数を X,Y とする．このとき $Z=min\{X,Y\}$ の確率分布を調べたい.

(1) 各 $n\geq 0$ に対して $P(X\geq n)=(1-p)^n$ を示せ．*Hint:* 言葉による説明で良い.

(2) $P(Z\geq n)$ をもとめよ．*Hint:* $Z\geq n \iff X\geq n$ かつ $Y\geq n$.

(3) $P(Z=n)$ をもとめよ． *Hint:* $\{Z=n\}=\{Z\geq n\}\setminus\{Z\geq n+1\}$.

Th.1.15. *(*離散確率変数の和の分布*)* X,Y を独立な整数値確率変数とする．そのとき，任意の $z\in\mathbf{Z}$ に対して

$$P(X+Y=z)=\sum_{x\in\mathbf{Z}}P(X=x)P(Y=z-x)$$

である．特に X,Y が共に非負整数値をとる時,

$$P(X+Y=z)=\sum_{x=0}^{z}P(X=x)P(Y=z-x)$$

Ex.1.16. A さんが n 回 B さんが m 回コインを投げ，表が出る回数をそれぞれ X 回，Y 回とする．$X+Y$ がしたがう確率分布を求めよ.

Ex.1.17. X,Y は独立な確率変数で，それぞれ平均 λ,μ の *Poisson* 分布に従うとき，$X+Y$ の確率分布は平均 $\lambda+\mu$ の *Poisson* 分布であることを示せ.

Ex.1.18. *(*負の *2* 項分布*)* $X_1,\cdots,X_n$ を幾何分布 $Ge(p)$ にしたがう独立な確率変数列とする．*(*もちろん，$q=1-p$ としている．*)*

(1) $x=0,1,2,\cdots$ に対して $P(X_1+X_2=x)$ を求めよ.

(2) 帰納法を用いて $x=0,1,2,\cdots$ に対して次の等式をしめせ.

$$P(X_1+X_2+\cdots+X_n=x)=\binom{x+n-1}{n-1}p^nq^x.$$

Hint: $X=X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}$ と $Y=X_n$ は独立である．よって X,Y の確率分布がわかっているとき，$X+Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の分布も *Th.1.15.* より計算できる.

4. 確率変数の期待値と分散

Def.4.1. *(確率変数の期待値)* $X = X(\omega)$ を Ω 上の確率変数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{\omega} |X(\omega)|P(\omega) < \infty$*(正項級数が収束する)* とき，級数 $\displaystyle\sum_{\omega} X(\omega)P(\omega)$ が存在するので，それを X の期待値といい，$E[X]$ と書く．すなわち

$$E[X] = \sum_{\omega} X(\omega)P(\omega).$$

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{\omega} |X(\omega)|P(\omega) = \infty$ のとき X の期待値は存在しないといい $E[|X|] = \infty$ と書く．

Prop.4.2. *(期待値の性質)* X, Y を期待値 $E[X], E[Y]$ が存在する確率変数とする．

(1) 任意の定数 a, b に対して $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$. *(期待値の線形性.)*

(2) $X \geq 0$，すなわちすべての $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) \geq 0$ ならば $E[X] \geq 0$.

(3) $X = 1$，すなわちすべての $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega) = 1$ ならば $E[X] = 1$.

(4) 任意の事象 $A \subset \Omega$ に対して $E[1_A] = P(A)$. ただし，確率変数 1_A は事象 A の指示関数，すなわち $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{if } \omega \in A, \\ 0 & \textit{if } \omega \notin A. \end{cases}$

Th.4.3. 確率変数 X は確率分布 $x \to p_x$ にしたがうものとする．関数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して $\displaystyle\sum_{x \in ImX} |g(x)|p_x < \infty$ ならば $E[g(X)]$ が存在し

$$E[g(X)] = \sum_{x \in ImX} g(x)p_x = \sum_{x \in ImX} g(x)P(X = x)$$

である．特に $\displaystyle\sum_{x \in ImX} |x|p_x < \infty$ ならば $E[X]$ が存在し $E[X] = \displaystyle\sum_{x \in ImX} xp_x$ である．

Def.&Prop.4.4. 確率変数 X の期待値 $m = E[X]$ が存在するとする．そのとき，

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - m)^2] = E[X^2] - m^2$$

を X の分散という．$E[X^2] = \infty$ の時，分散は存在しないといい $\mathrm{Var}[X] = \infty$ と書く．

(1) X が離散分布 $x \to p_x$ にしたがうとき $\mathrm{Var}[X] = \displaystyle\sum_{x} x^2 p_k - m^2 = \sum_{x} x^2 P(X = x) - m^2$.

(2) 任意の定数 $a.b$ に対して $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$ である．

Ex.4.5. *(2 項分布に従う確率変数の平均と分散)* コインを n 回なげ，表の出る回数を X とする．$E[X]$ および $\mathrm{Var}[X]$ を次のように求めよ．

(1) 事象 $A_k, k=1,\cdots,n$ を $A_k = \{k$ 回目に表がでる.$\}$ とする．$E[1_{A_k}]$ および $Var[1_{A_k}]$ をもとめよ.

(2) 確率変数列 $1_{A_1},\cdots,1_{A_n}$ は独立な確率変数列であり，$X = 1_{A_1}+\cdots+1_{A_n}$ であることに注意して $E[X]$ および $Var[X]$ をもとめよ.

Ex.4.6. *(幾何分布に従う確率変数の平均と分散)* 幾何級数 $Ge(p)$ に従う確率変数 X に対して $E[X] = \dfrac{q}{p},\ \mathrm{Var}[X] = \dfrac{q}{p^2}$ であることを示せ.

Ex.4.7. *Poisson* 分布 $Po(\lambda)$ にしたがう確率変数 X に対して $E[X]=\lambda,\ Var[X]=\lambda$ であることを示せ.

Th.4.8. *2* つの確率変数 X, Y が独立ならば次が成立する：

$$E[XY] = E[X]E[Y].$$

Th.4.9. *(分散の加法性)* $x_1,\cdots,X_n$ が独立な確率変数であるとき，

$$\mathrm{Var}[X_1+\cdots+X_n] = \mathrm{Var}[X_1]+\cdots+\mathrm{Var}[X_n].$$

Def.& Prop.4.10. *(確率変数の共分散)* 2つの確率変数 X, Y がそれぞれ平均 m_X, m_Y をもつとする．このとき，X, Y の共分散 $Cov(X,Y)$ を

$$Cov(X,Y) = E[(X-m_X)(Y-m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y$$

とおく．*(*明らかに $Cov(X,X) = Var[X]$ である．*)* X, Y の同時確率分布が $p(x,y)$ であるとき，前 *Prop.* より $Cov(X,Y) = \sum_{(x,y)} xyp(x,y) - m_X m_Y$. である.

Ex.4.11. 同時確率分布が *Ex.1.13.* においてあたえられる確率変数 X, Y に対してその共分散 $Cov(X,Y)$ をもとめよ.

Ex.4.12. X_1 および X_2 をベルヌーイ分布 $Be(p)$ にしたがう独立な確率変数とし，*(*すなわち $P(X_i=1)=p,\ P(X_i=0)=q,\ i=1,2$*)*，$X = min\{X_1,X_2\},\ Y = max\{X_1,X_2\}$ とする．そのとき X と Y の共分散 $Cov(X,Y)$ をもとめよ.

5. 連続確率変数

Def.& Prop.5.1. 確率変数 X に対して $F_X(x) = P(X \le x)$, $x \in \mathbf{R}$ を X の分布関数という．F は右連続な単調増加関数であり $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ をみたす．F_X がジャンプでのみ増加するとき，X を離散確率変数，F_X が連続関数のとき X を連続確率変数という．

Def.& Prop.5.2. X が連続確率変数で，その分布関数 F_X が区分的に微分できるとき，$f_X(x) = F'(x)$ を X の密度関数という．f_X は $f_X \ge 0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ をみたす．また任意の $a < b$ に対して次がなりたつ:

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Prop.5.3. 連続確率変数 X にたいして，任意の関数 g にたいして

$$E[g(X)] = \int g(x)f_X(x)dx$$

である．とくに X の平均 m，分散 v は以下であたえられる:

$$m = E[X] = \int xf_X(x)dx, \qquad v = \mathrm{Var}[X] = E[X^2] - m^2 = \int x^2 f_X(x)dx - m^2.$$

Ex.5.4. 以下の f が確率分布を定めること：$f \ge 0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ をたしかめよ.

(1) (a,b) 上の一様分布 $U(a,b)$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{if } x \in (a,b) \\ 0 & \text{if } x \notin (a,b). \end{cases}$

(2) パラメーター λ の指数分布 $Exp(\lambda)$: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \ge 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$

(3) 平均 $m \in \mathbf{R}$, 分散 $v >$ の正規分布 $N(m,v)$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\dfrac{1}{2v}(x-m)^2\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

Ex.5.5. 以下の連続確率分布の平均と分散が以下になる事を確かめよ.

確率分布	平均	分散	特性関数$\phi_X(t) = E[e^{itX}]$
1. 一様分布 $U(a,b)$;	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb} - e^{ita})$
2. 指数分布 $Exp(\lambda)$;	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
3. 正規分布 $N(m,v)$;	m	v	$e^{imt - \frac{1}{2}vt^2}$

Ex.5.6. X を標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう確率変数であるとする．$Y=|X|$ の密度関数をもとめよ．Y の平均と分散をもとめよ．

Def.5.7. 確率変数 X,Y にたいして $\mathbf{R}^2$ 上の非負値関数 $f_{X,Y}(x,y)$ があって，任意の $a<b,\ c<d$ にたいして

$$P(\,a<X\le b\,\text{かつ}\,c<Y\le d\,)=\int_a^b dx\int_c^d f_{X,Y}(x,y)dy$$

であるとき，$f_{X,Y}(x,y)$ を X,Y の同時密度関数という．X と Y が独立であるとき任意の x,y にたいして $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. が成立する．

Ex.5.8. *(一様分布)* X,Y が $(0,1)$ 上一様に分布する独立な確率変数であるとき，

(1) $U=min\{X,Y\}$ の分布の密度関数をもとめよ．

(2) $V=|X-Y|$ の分布の密度関数をもとめよ．

Hint: $P(U\le u)=1-P(U>u)=1-P(X>u,Y>u)$. 独立性をもちいる．

Ex 5.9. 確率変数 X,Y は独立でともに指数分布 $Exp(\lambda)$ にしたがうものとするとき，任意の正数 $t>0$ にたいして $P\left\{\dfrac{Y}{X}\le t\right\}=\dfrac{t}{1+t}$ となることを示せ．

Ex 5.10. X,Y が独立かつともに標準正規分布 $N(0,1)$ に従う時，X^2+Y^2 はパラメーター $\frac{1}{2}$ の指数分布 $Exp(\frac{1}{2})$ に従うことを示せ．

Th.5.11. X と Y は独立な確率変数とする．そのとき，$X+Y$ の密度関数 f_{X+Y} は

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

である．特に X,Y がともに非負値であるとき，

$$f_{X+Y}(z)=\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

Ex.5.12. X,Y をそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう独立な確率変数とするとき，$X+Y$ は $N(0,2)$ にしたがう事をしめせ．

6. 極限定理と推測理論への応用

Ex.6.1. *(大数の弱法則, Text P.139)* $X_1, X_2, \cdots$ を独立は確率変数列で，それぞれ平均 μ, 分散 v を持つものとする．各 n に対して $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく．その時

(1) $\frac{1}{n}S_n$ は μ に L^2 収束する，すなわち $\lim_{n\to\infty} E[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right|^2] = 0$ である事をしめせ.

(2) チェビシェフの不等式 $P(|X| \geq \epsilon) \leq \dfrac{E[|X|^2]}{\epsilon^2}, \forall\epsilon > 0$ を証明せよ.

(3) 大数の弱法則「$\frac{1}{n}S_n$ は μ に確率収束する」すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \epsilon) = 0$ を示せ.

Ex.6.2. さいころを n 回投げるとき，*6* の目が出る回数が $\frac{1}{6}n - \sqrt{n}$ と $\frac{1}{6}n + \sqrt{n}$ の間にある確率は $\dfrac{31}{36}$ 以上である事をチェビシェフ *(*マルコフ*)* の不等式を用いて示せ.

Th.6.3. *(*中心極限定理, *Text P.141)* $X_1, X_2, \cdots$ が独立かつ同分布の確率変数列とし，$m = E[X_i]$ および $v = Var[X_i] > 0$ が存在するものとする．そのとき，任意の $a < b$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k - m}{\sqrt{v}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

Ex.6.4. 表の出る確率が $\frac{2}{3}$ のコインを *180000* 回投げる．表の出る回数 S_{180000} について，確率 $P(115000 < S_{180000} < 130000)$ を中心極限定理を用いて近似するとき，次の式を満たす a, b を求めよ.

$$P(115000 < S_{180000} < 130000) \asymp \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

Ex.6.5. さいころを *12000* 回投げて *6* の目が出る回数を S とする．中心極限定理を用いて次の式を満たす a と b の値を求めよ.

$$P(1900 < S < 2200) \asymp \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

記号 **6.6.** 任意の $0 < \alpha < 1$ に対して $z(\alpha)$ を $\displaystyle\int_{-z(\alpha)}^{z(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1 - \alpha$ であるようなものとして定める．例えば，正規分布表より $\alpha = 0.05$ であるとき，$z(\alpha)$ は約 *1.96* である事がわかる.

Th.6.7. n 個の *i.i.d.* 列 $X_1, \cdots, X_n$ を独立試行による n 個のサンプルと呼ぶ．今，このサンプルの確率変数としての平均 $m = E[X_i]$ と分散 $v = Var[X_i]$ が未知であり，n 個のサンプルからそれらを推測したい．m の自然な推測値は n 個のサンプル平均 $\hat{S}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ である．一方，分散の推測値として <u>不偏サンプル分散</u>

$$U^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{S}_n)^2$$

をとる．*($n-1$ で割るのは一見不自然だが，このようにとると $E[U^2] = v$ である．)* 中心極限定理において v を U^2 で置き換えると，この時,

$$P\left(m \in \left[\hat{S}_n - \sqrt{\frac{U^2}{n}}z(\alpha), \hat{S}_n + \sqrt{\frac{U^2}{n}}z(\alpha)\right]\right) = 1 - \alpha$$

を得る．確率の中に現われる区間は $\left[\hat{S}_n - \sqrt{\frac{U^2}{n}}z(\alpha), \hat{S}_n + \sqrt{\frac{U^2}{n}}z(\alpha)\right]$ は，サンプル値から定まる区間である．これを <u>信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間</u> という.

Th.6.8. 前定理において，X_i が $Ber(p)$ に従う $\{0,1\}$-値であるとき，$m = E[X_i] = P(X_i = 1) = p$ である．従って，この場合は p を推定する．$Var[\hat{S}_n] = \frac{pq}{n}$, $q = 1-p$ だから中心極限定理より $\sqrt{\dfrac{n}{pq}}(\hat{S}_n - p) \to N(0,1)$, よって

$$P\left(p \in [\hat{S}_n - \sqrt{\frac{n}{pq}}z(\alpha), \hat{S}_n + \sqrt{\frac{n}{pq}}z(\alpha)]\right) = 1 - \alpha$$

である．しかし，ここで表れる区間は p を含んでいる． 区間に現われる p を $\hat{S}_n$ に置き換えた

$$P\left(p \in \left[\hat{S}_n - \sqrt{\frac{\hat{S}_n(1-\hat{S}_n)}{n}}z(\alpha), \hat{S}_n + \sqrt{\frac{\hat{S}_n(1-\hat{S}_n)}{n}}z(\alpha)\right]\right) = 1 - \alpha$$

を得る．ベルヌーイの場合はこのようにして信頼区間を求める事ができる.

Th.6.9. あるスポーツの競技をしている *400* 人を調べたところ，*80* 人がひじにけがをしていたう．このデータから，この競技をする人のひじにけがをする割合の信頼度 95% の信頼区間を求めよ.

Ex.6.10. *100* 人の身長のデータの標本平均 $\hat{S} = 169.5$ であり，その不偏分散 $U^2 = (5.2)^2$ であるとき，身長の推定量 $\hat{S} = 169.5$ の信頼度 95% の信頼区間を求めよ．$\alpha = 0.05$ の時, $z(\alpha) = 1.96$ としてよい.

7. 補足

Ex.7.1. *(Γ 分布)* $X_1, X_2, \cdots$ がパラメーター λ の指数分布に従う独立な確率変数の列とする．$S_0 = 0$ とし，各 n に対し $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とするとき，S_n は次の密度関数 f_n をもつことを帰納法を用いて示せ.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

この密度関数 f_n をもつ確率分布をガンマ分布 $(\Gamma(n, \lambda))$ という.

Ex.7.2. *(Poisson Process)* 任意の $t > 0$ に対して $N(t) = \sup\{n;\ S_n \leq t\}$ とおく．$N(t)$ は *Poisson* 分布にしたがうことを示せ．*($N(t)$ は Poisson 過程と呼ばれ，ブラウン運動とならび最も重要な確率過程の一つである．)*

Hint: $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$, よって

$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$. これは前問より計算できる．部分積分.

Ex.7.3. *(2 次元正規分布)*：$m_1, m_2 \in \mathbf{R}$, $\sigma_i > 0, i = 1, 2$, $|\rho| < 1$ として, 密度関数が

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2) =& \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\end{aligned}$$

で与えられる $\mathbf{R}^2$ 上の確率分布を 2 次元正規分布という.

(1) 2×2 行列 A を $A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ によって定義すると,

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det A}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2}(A^{-1})_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right\}$$

とあらわされることを示せ．*(A は $|\rho| < 1$ の時に正値行列であることに注意.)*

(2) 確率変数ベクトル (X_1, X_2) が同時分布密度関数として $\phi(x_1, x_2)$ をもつとき X_1 は正規分布 $N(m_1, \sigma_1^2)$ に従う事を示せ.

(3) X_1 と X_2 の相関係数 $\rho(X_1, X_2)$ は $\rho(X_1, X_2) = \rho$ であることを示せ.

(4) $\rho = 0$, すなわち X_1 と X_2 の相関係数＝0であるとき X_1 と X_2 は独立であることを示せ.（正規分布特有の著しい性質！）

Ex.7.4. 中心極限定理の証明のために以下の事実を確かめよう.

(1) 一般に，確率変数 X が $E[X^2] < \infty$ を満たすならばルベーグの優収束定理を用いて $\lim_{t\to 0} E\left[\, t|X|^3 \wedge |X|^2 \,\right] = 0$ である事をしめせ.

(2) 任意の実数 x に対して $\left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \le \frac{1}{6}|x|^3 \wedge |x|^2$ を確かめよ.

(3) $E[X] = 0$, $Var[X] = 1$ であるとき，X の特性関数 $\phi_X(t)$ は次を満たす事をしめせ.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\left|\phi(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)\right| = 0.$$

Ex.7.5. 前問で確かめた事を用いて中心極限定理を証明しよう．$X_1, X_2, \cdots$ を平均 *0*、分散 *1* の独立な確率変数列であるとする．このとき、

(1) $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の特性関数 $\phi_{\bar{Z}_n}$ にたいし $\phi_{Z_n}(t) = \phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$ をしめせ.

(2) $\phi_{Z_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ $(n \to \infty)$ をしめせ．*(*t は固定し，$n \to \infty$ としていることに注意．*)*

(3) 連続性定理 *(*教科書 *P146)* をもちいて中心極限定理をしめせ.

Ex.7.6. *(2* 項分布のエントロピー関数*)* 定数 $p \in (0,1)$ をひとつとり $q = 1-p$ とする．$(0,1)$ 上の関数 $H(x)$ を $H(x) = x\log\frac{x}{p} + (1-x)\log\frac{1-x}{q}$ とおく．このとき

(1) $(0,1)$ 上 $H(x) \ge 0$ かつ $H(p) = 0$ をしめせ.

(2) テイラーの定理を用いて，$x \to p$ の時 $H(x) = \frac{1}{2pq}(x-p)^2 + O(\,|x-p|^3\,)$ を示せ.

Ex.7.7. *(*ドモアブル-ラプラスの定理*)* $X_1, X_2, \cdots$ を $\{0,1\}$ に値をとる独立同分布の確率変数列とし，$P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p = q$ とする．$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく．$a < b$ に対して $A_n(a,b)$ を区間 $[np + a\sqrt{npq}, np + b\sqrt{npq}]$ のなかの整数点の全体とする．任意の $k \in A_n(a,b)$ に対して，

(1) スターリングの公式を用いて，$n \to \infty$ において

$$P(\,S_n = k\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\hat{p}\hat{q}}}\exp\{-nH(\hat{p})\}(1 + o(1)), \quad \hat{p} = \frac{k}{n},\ \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

である事を示せ.

(2) 前問 *Ex.7.6.* の結果を用いて，$n \to \infty$ において

$$P(\,S_n = k\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\}(1 + o(1)),$$

である事を示せ.