2009 年度微分積分学 2(数理科学科) 中間試験 (11 月 18 日)
注意：人に読ませる気がないと思われる答案は評価しない．また計算や論述の重要な論点を省略したものは大幅な減点になる．

Q.0.1. 以下の問いに答えよ．(事実を述べるだけでよい．)

(1) $\mathbf{R}$ 上 (実数上) の 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ がすべての実数 x に対して $f(x) > 0$ であるための実定数 a, b, c に対する必要十分条件を書け.

(2) 1 変数の関数に対するテイラーの定理を述べよ.

(3) 2 変数の関数が C^2 級であるとはどのような条件か.

(4) 2 変数の関数 $f(x, y)$ に対して 1 次近似が可能である ($f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + r(h, k)$, $\displaystyle\lim_{h,k\to 0} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$ である) ためには f の偏導関数 f_x, f_y が存在する他に，どのような条件が必要か.

Q.0.2. 以下の問いに応えよ．

(1) 曲面 $z = 3x^2y + xy$ の点 $(1, -1, -4)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y) = \log(1 + x + 2y)$ の $(a, b) = (1, 0)$ における 2 次近似 $f(1 + h, k)$ を求めよ．
ヒント：(a, b) の近傍における $f(a + h, b + k)$ の 2 次近似は,
$f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \dfrac{1}{2}\{f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2\}$ により与えられる．

Q.0.3. 関数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ について以下の問に答えよ．

(2) 偏導関数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ を求めよ．ヒント：$(x, y) \neq (0, 0)$ の場合は通常の計算で良い．$f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ は偏微分係数の定義に立ち戻って計算せよ．(講義で話した．)

(3) $f(x, y)$ は $(0, 0)$ において連続ではない事を示せ．

Q.0.4. 以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ を C^2 級の 2 変数関数とし，k を定数とする．$h(t) = f(k \cos t, k \sin t)$ に対し $h''(t)$ を $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_x, f_y$ で表せ．

(2) 2 階までの偏導関数が存在するような $f(x, y)$ に対し $g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$ とする時, g_u, g_{uv} を $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を用いて表せ．

Q.0.5. $f(x, y)$ を C^2 級の 2 変数関数とし，$g(u, v) = f\left(\dfrac{u - v}{\sqrt{2}}, \dfrac{u + v}{\sqrt{2}}\right)$ とする．

(1) g_u および g_v を f_x，f_y を用いて表せ．それを用いて $g_u^2 + g_v^2 = f_x^2 + f_y^2$ を示せ．

(2) $g_{uu} + g_{vv} = f_{xx} + f_{yy}$ を示せ．

2009 年度微分積分学 2(数理科学科) 定期試験 (1 月 18 日)
注意：人に読ませる気がないと思われる答案は評価しない．また計算や論述の重要な論点を省略したものは大幅な減点になる．

Q.0.1. *(1)* 2 変数の関数 $f(x,y)$ に対して 1 次近似が可能である ($f(a+h,b+k)=f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+r(h,k)$, $\displaystyle\lim_{h,k\to 0}\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ である) ための f が満たすべき条件を述べよ. (結果だけで良いが，記号を用いる時にはその記号の意味も説明せよ.)

(2) 関数 $f(x,y)$ は C^2 級であるとする．平面上の点 $A(a,b)$ の近傍 $P(a+h,b+k)$ における f の値 $f(P)$ が h,k のどのような 2 次関数によって近似されるか，テイラーの定理に基づき述べよ.

Q.0.2. 次の関数は，どの点において極大値または極小値をとるかを決定せよ.

(1) $z=e^{x-y}(x^2+y^2)$.

(2) $z=x^4+y^2-2xy$.

Q.0.3. $f(x,y)$ を C^2 級の 2 変数関数とする．$h(s,t)=f(s-t^2,\frac{s}{t})$ とするとき，h_s, h_{ss}, h_{st} を $f_x,f_y,f_{xx},f_{xy},f_{yy}$ を用いて表せ.

Q.0.4. *(1)* 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 dx\int_{x^4}^{x^2} dy f(x,y)$ はどのような領域 D 上の重積分になるか．D を xy 平面上に図示せよ．また，積分順序を変更した累次積分の式を書け.

(2) 平面上の領域 D=$\{(x,y);\ 0\le x\le 1,\ x\le y\le 2x\}$ に対して重積分 $\displaystyle\int\int_D xy(x+y)dxdy$ を計算せよ.

Q.0.5. *(1)* 平面上の領域 $D=\{(x,y);-a\le x+y\le a,\ -b\le x-y\le b\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D(x^2-xy+y^2)dxdy$ を計算せよ.

(2) 極座標変換を利用して重積分の広義積分 $\displaystyle\int\int_{\mathbf{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+x+y^2)^2}dxdy$ を計算せよ.

Q.0.6. *(1)* 平面上の領域 $D=\{(x,y);x^2+y^2\le a^2\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を計算せよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ を計算せよ. (講義で説明した事柄なので，丁寧かつ要所を押さえた説明を求める.)