## 1. 偏微分と接平面，合成関数の微分

**Ex.1.1.** 次の関数のグラフ $z = f(x, y)$ の概形を描け.

$$(1)\ f(x,y) = 1 - x - y \quad (2)\ f(x,y) = -x^2$$

$$(3)\ f(x,y) = x^2 - y^2, \quad (4)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Ex.1.2.** 次の関数の *1* 階偏導関数 $f_x$，$f_y$ を求めよ.

$$(1)\ \sin(x^2 y) \quad (2)\ \cos(x^2 + xy) \quad (3)\ \arctan(y^2 - 2xy) \quad (4)\ \log\frac{x+y}{x-y}$$

$$(5)\ \arctan\frac{y}{x} \quad (6)\ \frac{x^2}{x+y^2} \quad (7)\ xye^{-x^2y^3} \quad (8)\ \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

**Ex.1.3.** 以下の問いに答えよ.

*(1)* *1* 変数の関数 $y = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能である事を示せ.

*(2)* *2* 変数の関数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ は $(0, 0)$ で偏微分可能か.

**Ex.1.4.** *2* 変数関数

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

に対して $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ が成立する事を示せ.

**Ex.1.5.** *2* 変数関数 $f(x, y)$ に対して $gradf(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ とおく．これを $f$ の *gradient(*勾配*)* ベクトルという．次の $f$ に対して $gradf$ を求め，等高線を何本か求め $gradf$ と等高線が直交する事を確かめよ.

$$(1)\ f(x,y) = x + 2y \quad (2)\ f(x,y) = x^2 + y^2$$

**Ex.1.6.** 次の曲面の，$(x, y)$ が以下で与えられる曲面上の点における接平面を求めよ.

(1) $z = xy(x^2 + y^2 - 4)$, 点 $(1, 2)$ で. (2) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, 点 $(1, 2)$ で.

(3) $z = x^3 + y^3 - xy$, 点 $(1, -1)$ で. (4) $z = \sin(2x + y^2)$, 点 $(0, 0)$ で.

(5) $z = \log(x^2 + y^2)$, 点 $(2, 1)$ で. (6) $z = \sin(xe^y)$, 点 $(2, 0)$ で.

(7) $z = x^3 - y^2$, 点 $(1, 2)$ で. (8) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$, 点 $(2, 1)$ で.

**Ex.1.7.** 次の関数 $f(x,y)$ の *2* 階偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよ.

| | | |
|---|---|---|
| (1) $x^3 - 3x^2y + 4y^2$ | (2) $ye^{xy}$ | (3) $\sqrt{4x+6y}$ |
| (4) $\dfrac{x}{y}$ | (5) $\cos(2x+3y-1)$ | (6) $\log(x^2y^3)$ |
| (7) $(1-xy^2)^2$ | (8) $\dfrac{1}{1+x+y^2}$ | (9) |

**Ex.1.8.** 関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

とおく．これを $f$ のラプラシアン *(Laplacian)* と呼ぶ．以下の関数に対して $\Delta f = 0$ を示せ.

| | |
|---|---|
| (1) $x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ | (2) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ |
| (4) $e^{2x}\sin 2y$ | (5) $\log(x^2+y^2)$ |

**Ex.1.9.** 以下の関数 $f(u,v)$ に対して合成関数 $g(x) = f(u(x), v(x))$ あるいは $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ を考えた時，$g_x(x)$ あるいは $g_x(x,y), g_y(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(u,v) = u^2v^5, \quad u(x) = x,\ v(x) = x^2$

(2) $f(u,v) = u^2v^5 + e^{uv}, \quad u(x) = x,\ v(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(3) $f(u,v) = u^2 + uv - v^2, \quad u(x) = x,\ v(x) = 2x - 3$

(4) $f(u,v) = u^2 + uv - v^2, \quad u(x,y) = x + y,\ v(x,y) = x - y$

(5) $f(u,v) = u^2 + y^2, \quad u(x,y) = y\cos x,\ v(x,y) = y\sin x$

(6) $f(u,v) = e^{u-2v}, \quad u(x) = \sin x,\ v(x) = x^3$

(7) $f(u,v) = u^2\log y, \quad u(x,y) = \dfrac{x}{y},\ v(x) = 3x - y$

**Ex.1.10.** 関数 $f(u,v)$ に対して $g(x,y) = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ の偏導関数 $g_x(x,y), g_y(x,y)$ を $f_u, f_v$ を用いて表せ.

**Ex.1.11.** *2* つの *2* 階連続的微分可能な *1* 変数関数 $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ に対して

$$u(t,x) = f(x-t) + f(x+t)$$

によって定まる *2* 変数関数 $u(t,x)$ は波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ を満たす事を示せ *(*ダランベールの一般解*)*.

## 2. 多変数関数の連続性，微分可能性，テイラーの定理

**Ex.2.1.** 以下の関数のグラフ $z = f(x,y)$ の等高線 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ f(x,y) = \frac{1}{2}\}$ のグラフ $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ f(x,y) = \frac{1}{2}\}$ を描け．また，$y=0$ におけるグラフ $\{(x,z) \in \mathbf{R}^2;\ z = f(x,0)\}$ を描け．

$$(1)\ f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad (2)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (3)\ f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

**Ex.2.2.** 次の直線に沿って $(x,y)$ が $(0,0$ に近づくとき，関数 $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ の極限値を求めよ．

*(1)* 直線 $y = x$.

*(2)* $x$ 軸.

*(3)* $y$ 軸.

**Ex.2.3.** 以下の *2* 変数関数 $f(x,y)$ に対して $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在するか．存在するならばその値を求めよ．

$$f(x,y) = \quad (1)\ \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad (2)\ \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \qquad (3)\ \frac{x^3y^3}{x^4+y^4}$$
$$(4)\ \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad (5)\ \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad (6)\ \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$

**Ex.2.4.** 以下の関数は原点において連続であるかどうか判定せよ．

$$(1)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (2)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$(3)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Ex.2.5.** 関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ について以下を確認せよ．

*(1)* 原点を含むすべての点で偏微分可能である．

*(2)* 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ は $(0,0)$ において連続ではない．

*(3)* $f(x,y)$ は $(0,0)$ において連続ではない．*(*すなわち，多変数関数の場合，偏微分可能であっても必ずしも連続な関数になるとは限らない．*)*

**Ex.2.6.** 定理 *15.2*「$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が $C^1$ 級ならば $f$ は全微分可能である.」を証明せよ．教科書 問 *15.3* を解け.

**Ex.2.7.** $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を偏導関数 $f_x$ および $f_y$ が存在する関数とする．教科書の定理 *15.2* を用いて以下の $x=x(t)$ および $y=y(t)$ に対して $g(t)=f(x(t),y(t))$ の導関数 $g'(t)$ を $f_x$, $f_y$ を用いて $t$ の関数として表せ. *(*例*:* $x(t)=2t, y(t)=t^2$ ならば $g'(t)=2f_x(2t,t^2)+2f_y(2t,t^2)t$.*)*

(1) $x(t)=t^3,\ y(t)=t^2.$　　(2) $x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t.$

(3) $x(t)=3t,\ y(t)=2t.$　　(4) $x(t)=t^3,\ y(t)=t^2.$

(5) $x(t)=t^2,\ y(t)=1-t^2.$　　(6) $x(t)=\cos 2t,\ y(t)=\sin 2t.$

**Ex.2.8.** $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を偏導関数 $f_x$ および $f_y$ が存在する関数とする．教科書の定理 *15.2* を用いて以下の $x=x(s,t)$ および $y=y(s,t)$ に対して $g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$ の偏導関数 $g_s(s,t)$ および $g_t(s,t)$ を $f_x$, $f_y$ を用いて $s,t$ の関数として表せ. *(*例*:* $x(t)=3s+2t, y(t)=st^2$ ならば $g_s(s,t)=3f_x(3s+2t,st^2)+f_y(3s+2t,st^2)t^2$.*)*

(1) $x(s,t)=s-t^2,\ y(s,t)=\dfrac{t}{s^2}$　　(2) $x(s,t)=\dfrac{s}{t},\ y(s,t)=\dfrac{1}{1+s^2}$

(3) $x(s,t)=se^t,\ y(s,t)=2s-3$　　(4) $x(s,t)=t\cos s,\ y(s,t)=t\sin s$

(5) $x(s,t)=\sin s,\ y(s,t)=s^3t^2$　　(6) $x(s,t)=\dfrac{s}{t},\ y(s,t)=3s-t$

**Ex.2.9.** 教科書 問 *16.1*, 問 *16.2* を解け.

**Ex.2.10.** *(*例題 *17.2)* $f(x,y)$ を $C^2$ 級関数とする.

*(1)* $xy$ 直交座標系で $(x,y)$ と表される平面上の点を，$\pi/4$ 回転させた $uv$ 座標系では $(u,v)$ と表す時，$x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}}, y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$ である事をしめせ.

*(2)* *(1)* の $x,y$ を $x=x(u,v), y=y(u,v)$ と書き，$g(u,v)=f\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ とおく．この時以下を示せ；

$g_u(u,v)^2+g_v(u,v)^2=f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2,$

$g_{uu}(u,v)+g_{vv}(u,v)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y),$

ただし右辺の $(x,y)$ は左辺の $(u,v)$ に対して $x=x(u,v), y=y(u,v)$ により与えられるもの．すなわち平面上の同じ点を $uv$ 座標系と $xy$ 座標系で見たものである.

**Ex.2.11.** 例題 *17.4 (*特に重要*)*，問 *17.1*, 問 *17.2* を解け.

**Ex.2.12.** 以下の関数 $f$ に対して以下の指定された点 $(a,b)$ の近傍における $f(a+h,b+k)$ の 2 次近似 $f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\dfrac{1}{2}\{f_{xx}(a,b)h^2+2f_{xy}(a,b)hk+f_{yy}(a,b)k^2\}$ を求めよ．*(例*：$f(x,y)=e^{x+2y}$,　$(a,b)=(0,0)$ ならば，$f(h,k)=1+h+2k+\frac{1}{2}(h^2+4hk+4k^2)$.

*(1)* $f(x,y)=\log(1+x+2y)$,　$(a,b)=(1,0)$

*(2)* $f(x,y)=\sin(xy)$,　$(a,b)=(1,\pi)$

*(3)* $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y}$,　$(a,b)=(0,0)$

*(4)* $f(x,y)=\cos(x+2y)$,　$(a,b)=(0,\frac{\pi}{2})$

*(5)* $f(x,y)=e^{x-y}$,　$(a,b)=(0,0)$

*(6)* $f(x,y)=\cos(x+2y)$,　$(a,b)=(0,0)$

**Ex.2.13.** 次の関数 $f$ が極値をとる点を求め，それらが極大点，極小点，鞍点のいずれであるか調べよ．

*(例)* $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x^4-y^4$. $f_x=f_y=0$ を解いて極値の可能性のある点は $(x,y)=(0,0),(1,-1),(-1,1)$. $f_{xx}=2-12x^2$，$f_{xy}=-2$，$f_{yy}=2-12y^2$ だから $D=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ は $(0,0)$ では $D=0$, より極値は判別できず．$(1,-1)$ では $D=96, f_{xx}=-10$ より極大値 2. $(-1,1)$ では $D>0$ かつ $f_{xx}<0$ より極大値 *2.*

(2) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2-4y$

(3) $f(x,y)=x^3+2xy-x-2y$

(4) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$

(5) $f(x,y)=x^4+y^2+2x^2-4xy$

(6) $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-y$

(7) $f(x,y)=xy$

(8) $f(x,y)=(x-1)e^{xy}$

(9) $f(x,y)=\sin x+\cos x$

**Ex.2.14.** 教科書の例題 *18.5* および問 *18.1.*

## 3. 重積分 1—累次積分への帰着

**Ex.3.1.** 指定された領域 $D$ 上の以下の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int\int_D \sin(2x+y)dxdy, \qquad D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

(2) $\displaystyle\int\int_D \log(1+2x+y)dxdy, \qquad D=[0,1]\times[1,2]$

(3) $\displaystyle\int\int_D y\sin xy dxdy, \qquad D=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

(4) $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{(1+x+y)^3}dxdy, \qquad D=[0,1]\times[0,1]$

(5) $\displaystyle\int\int_D \frac{y}{(xy+1)^2}dxdy, \qquad D=[0,1]\times[0,1]$

(6) $\displaystyle\int\int_D 2x\sqrt{x^2+y}dxdy, \qquad D=[0,3]\times[0,1]$

**Ex.3.2.** 指定された領域 $D$ 上の以下の定積分を計算せよ．*2* 通りの累次積分を実行し，値が一致する事を確認せよ.

(1) $\displaystyle\int\int_D x^2ydxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

(2) $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{(1+x+y)^3}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

(3) $\displaystyle\int\int_D \sin(x+y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le y\le 1\}$

(4) $\displaystyle\int\int_D (x^2+y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le y\le 1\}$

(5) $\displaystyle\int\int_D xydxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ x\le y\le 2x\}$

(6) $\displaystyle\int\int_D xy^2dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ x+y\le 1\}$

**Ex.3.3.** 以下の累次積分はどのような領域 $D$ 上の重積分になるか．$D$ を $x-y$ 平面上に図示せよ．また，積分順序を変更した累次積分の式を書け.

$$(1)\ \int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{x}} dyf(x,y) \qquad (2)\ \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dyf(x,y)$$

$$(3)\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dyf(x,y) \quad (4)\ \int_{-2}^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} dxf(x,y)$$

**Ex.3.4.** 問 *20.2* の被積分関数をやさしくしたり，領域 $D$ の表し方を丁寧にしたもの．$D$ の絵を書き，累次積分に書き換えて計算せよ．

*(1)* $\displaystyle\int\int_D (1-x-y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$

*(3)* $\displaystyle\int\int_D x^2y^2(1-x-y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$

*(4)* $\displaystyle\int\int_D (y-x^2)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq 1\}$

*(5)* $\displaystyle\int\int_D \sqrt{y^2-x^2}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ -1\leq x\leq 1,\ |x|\leq y\leq 1\}$

*(7)* $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x^2}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\leq 1,\}$

**Ex.3.5.** 変数変換を用いて以下の積分を計算せよ．教科書例題 *22.2* 参照のこと．

*(1)* $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{(1+x+y)^3}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ -a\leq x+y\leq a,\ -b\leq x+y\leq b\}$

*(2)* $\displaystyle\int\int_D xydxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ -a\leq x+y\leq a,\ -b\leq x+y\leq b\}$

*(3)* $\displaystyle\int\int_D (x+y)^2\sin(x-y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ -\pi\leq x+y\leq \pi,\ -\pi\leq x+y\leq \pi\}$

*(4)* $\displaystyle\int\int_D (x^2-y^2)^2dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ -a\leq x+y\leq a,\ -b\leq x+y\leq b\}$

*(5)* $\displaystyle\int\int_D (2x^2+5xy+2y^2)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ 0\leq 2x+y\leq a,\ 0\leq x+2y\leq b\}$

*(6)* $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ |x|+|y|\leq a\}$

**Ex.3.6.** 次の指定された領域 $D$ 上の定積分を極座標変換を用いて計算せよ．ただし $a$ を正の定数とする．例題 *22.4* 参照．

*(1)* $\displaystyle\int\int_D x^2dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq a^2\}$

*(2)* $\displaystyle\int\int_D xydxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq 0\}$

*(3)* $\displaystyle\int\int_D \log(x^2+y^2)dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq a^2\}$

*(4)* $\displaystyle\int\int_D xdxdy, \quad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq x\}$ ヒント:$x-1/2=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおく．

*(5)* $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)^ndxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq a^2\}$

*(6)* $\displaystyle\int\int_D xye^{-(x^2+y^2)}dxdy, \qquad D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leq a^2\}$

**Ex.3.7.** 半径 $a$ の球の体積を求めよ.（例題 *22.4* を参考に.）

**Ex.3.8.** 楕円体

$$A = \{(x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

の体積を，前問を参考にしてもとめよ.

**Ex.3.9.** （例題 *23.3*）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ．また $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 - 2x} dx$ を求めよ.

**Ex.3.10.** （例題 *23.4*）次の広義積分を求めよ.

$$(1)\ \int\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^3} \qquad (2)\ \int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2 + xy + 2y^2)} dxdy$$

**Ex.3.11.** （問 *23.1*）次の広義積分を求めよ.

$$(1)\ \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x + y)^3} \quad (2)\ \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2 + xy + 2y^2 + y)} dxdy \quad (3)\ \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2}$$