.

1. 条件付き確率，条件付き期待値，Random Walk

Prop.1.1. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分加法族 (σ-field)，$\mathcal{H}$ を $\mathcal{G}$ の部分加法族であるとする．$(\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}.)$

(1) $\mathcal{F}$-可測な確率変数 X に対して $\omega \to E[X|\mathcal{G}](\omega)$ は $\mathcal{G}$-可測な確率変数である．

(2) X が $\mathcal{G}$-可測ならば $E[X|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega),\ P-a.s.\ \omega$ である．

(3) X が $\mathcal{G}$-可測,Y が $\mathcal{F}$-可測ならば

$$E[\ XY|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega)E[\ Y|\mathcal{G}](\omega),\ P-a.s.\ \omega.$$

(4) 任意の $\mathcal{G}$-可測集合 A に対して，

$$E[\ E[X|\mathcal{G}] \cdot 1_A] = E[\ X \cdot 1_A],\quad \text{とくに,}\quad E[\ E[X|\mathcal{G}]\ ] = E[X].$$

(5) さらに，$E[\ E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}\ ](\omega) = E[X|\mathcal{H}].\ P-a.s.\ \omega$

(6) X が $\mathcal{G}$ と独立ならば

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = E[X],\ P-a.s.\ \omega.$$

Ex.1.2. $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $P(1) = \frac{1}{8}$, $P(2) = \frac{3}{8}$, $P(3) = \frac{1}{4}$, $P(4) = \frac{1}{4}$ とする．Ω 上の部分加法族 $\mathcal{G}$ を，$\mathcal{G} = \{\phi, B_1, B_2, \Omega\}$，ただし $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4\}$ とする．この時,

(1) $\mathcal{G}$-確率変数 X の例をあげよ．

(2) Ω 上の確率変数 Y を適当に定め，それに対して $E[Y|\mathcal{G}]$ を求めよ．

Def.& Prop.1.3. *(Random Walk)* $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ を独立かつ $P(\xi_k = -1) = P(\xi_k = 1) = \frac{1}{2}$ によって定まる同分布の確率変数列とする．$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$, $n \geq 1$ とする．$M_0 = 0$, $M_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1,2,\cdots$ により定まる確率変数列 $\{M_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を *1* 次元単純対称ランダムウォークという．その時，$\{M_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は $(\mathcal{F}_n)$-*martingale* である，すなわち，$0 \leq m < n$ に対して

$$E[M_n|\mathcal{F}_m] = M_m$$

が成立する．

Ex.1.4. *(離散 martingale)* 前 *Prop.* において，f_0 を定数，各 $n = 1, \cdots$ に対して f_n を $\mathcal{F}_n$-可測な可積分な確率変数の列とする．$I(f)_n = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}\xi_k$, $n = 1, 2, \cdots$ とおく．その時,

(1) $E[I(f)_n] = f_0$, $E[I(f)_n^2] = \sum_{k=1}^{n} E[f_k^2]$ をしめせ.

(2) $n < m$ の時，$E[I(f)_m|\mathcal{F}_n] = I(f)_n$ であることをしめせ.

Ex.1.5. *(Scaled Random Walk)* 対称 *Random Walk* $\{M_n\}_{n=0,1,\cdots}$ から，各 n に対し任意の正の実数 t に対して確率変数列 $\{W_t^{(n)}\}_{t\geq 0}$ を

$$W_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]},$$

により定める.

(1) $E[W_t^{(n)}] = 0$ および $Var[W_t^{(n)} - W_s^{(n)}] \to t - s$ を示せ.

(2) 中心極限定理より，$W_t^{(n)} - W_s^{(n)}$ の分布は $N(0, t-s)$ に弱収束する事をしめせ.

2. ブラウン運動 (Brownian motion)

Def.2.1. 確率変数の列 $\{W_t\}_{t\geq 0}$ が以下の条件を満たすとき，それを x を出発するブラウン運動という：

(1) *(道の連続性)* $P - a.s.\omega$ に対して $W_0(\omega) = x$ かつ $t \to W_t(\omega)$ が連続.

(2) *(独立増分性)* 任意の $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ に対して $W_{t_1} - W_{t_0}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ は独立で，それぞれ $N(0, t_k - t_{k-1})$ に従う.

Notation.2.2. $x \in \mathbf{R}$ に対して，$P_x(W. \in A)$ は x を出発するブラウン運動 $W.$ についての確率を表す．$E_x[f(W.)]$ は x を出発するブラウン運動についての期待値を表す.

Ex.2.3. *0* を出発するブラウン運動に対して以下をしめせ.

(1) $E_0[W_t^{2n}] = (2n-1)!!t^n, \quad E_0[W_t^{2n-1}] = 0, \quad n \in \mathbf{N}$.

(2) $0 < s < t$ に対して $W_t - W_s$ と $\mathcal{F}_s = \sigma\{W_u, u \leq s\}$ は独立である.

(3) $E_0[W_t W_s] = min\{t, s\}$.

(4) $\{W_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}-martingale$ である，つまり $0 < s < t$ に対して $E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s$, P-a.s.

(5) 定数 $\gamma > 0$ に対して $W_t^\gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} W_{\gamma t}$ とおくと，$\{W_t^\gamma\}_{t\geq 0}$ はブラウン運動である.

Notation.2.4. 任意の $t > 0$, $x, y \in \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$p(t, x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \qquad p(t, x, A) \equiv \int_A p(t, x, y) dy.$$

Ex.2.5. $0 < s < t$ とする．

(1) 直接計算することにより $\int_{\mathbf{R}} p(s,0,x)p(t-s,x,y)dx = p(t,0,y)$ を示せ．

(2) 独立増分性より

$$P_0(W_s \in A, W_t \in B) = \int_{A\times B} p(s,0,x)p(t-s,x,y)dxdy$$

を示せ．

Th.2.6. *(ブラウン運動の Markov 性)* そのとき，任意の $0 < s, t$ に対して

$$P(W_{s+t} \in A|\mathcal{F}_s) = p(t, W_s, A)$$

が成立する．すなわち，s までの道 $W.$ の情報の下で，W_{s+t} の確率法則は，W_s を出発するブラウン運動の t 後の確率法則と一致する．特に，s 以前の道の情報とは独立である．

Ex.2.7. *(Heat semigroup)* $t \geq 0$ に対し，$\mathbf{R}$ 上の関数 f から新しい関数 $T_t f$ を

$$T_t f(x) = E_x[f(W_t)], \qquad x \in \mathbf{R}$$

と定める．(T_t を作用素という.）このとき，$s, t \geq 0$ に対し次を示せ：

$$T_{s+t}f(x) = T_s(T_t f)(x) \qquad x \in \mathbf{R}.$$

ヒント：ブラウン運動の Markov 性より，$f \in C_b(\mathbf{R})$($\mathbf{R}$ 上の有界連続関数) に対して

$$E[f(W_{s+t})|\mathcal{F}_s] = \int_{\mathbf{R}} f(x)p(t, W_s, x)dx = E_{W_s}[f(\overline{W}_t)]$$

である．ここで $\{\overline{W}.\}$ は W_s から出発するブラウン運動である．

Th.2.8. *(ブラウン運動の強 Markov 性)* τ をブラウン運動の停止時間とする，$F \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対し $\tau = inf\{t > 0, W_t \in F\}$ とする．その時,

$$P(W_{\tau+t} \in A|\mathcal{F}_\tau) = p(t, W_\tau, A)$$

が成立する．すなわち，F を *hit* するまでの道 $W.$ の情報の下で，*hit* してから t 後のブラウン運動の確率法則は，*hit* した場所を出発するブラウン運動の t 後の確率法則と一致する．特に，*hit* する以前の道の情報とは独立である．

Th.2.9. *(反射原理)* $a \geq 0,\ x \geq 0,\ t > 0$ に対して $M_t = sup_{0 \leq s \leq t} W_s$ とする．$\{M.\}$ を最大値過程という．その時，ブラウン運動の強マルコフ性および分布の対称性より次は明らかである *(絵を描いてみよ)*：

$$P_0(\ M_t \geq a \text{ かつ } W_t < a - x\ ) = P_0(W_t > a + x\ ).$$

Ex.2.10. *(最大値過程の分布)* 最大値過程の分布は以下で定まる事を示せ：

$$P_0(\ M_t \geq a\ ) = 2P_0(W_t > a\ ) = \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Ex.2.11. $a > 0$ に対して $\tau_a = inf\{t > 0;\ W_t = a\ \}$ とする．その時，

$$M_t \geq a \iff \tau_a \leq t$$

である．これと，前問より確率変数 τ_a について次を示せ：

(1) $P(\tau_a < \infty\ ) = 1$, すなわち，*1* 次元ブラウン運動は再帰的である．

Hint: 単調連続性より $\lim_{t \to \infty} P(\tau_a \leq t) = 1$ を示せばよい．

(2) τ_a の密度関数 f は次で定まる事を示せ：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \qquad t \geq 0.$$

(3) $E[\tau_a] = \infty$ を示せ．すなわち，*1* 次元ブラウン運動は再帰的であるが正再帰的ではない．

3. ブラウン運動と熱方程式 (Brownian Motion and Heat Equation)

Ex.3.1. *(半群の生成作用素) Ex.2.7.* においた *Heat Semigroup* に対して，$f \in C^3(\mathbf{R})$ である時，$\{T_t\}_{t>0}$ の生成作用素 *(generator)* $Lf(x) = \left.\frac{\partial}{\partial t} T_t f(x)\right|_{t=0}$ は $Lf(x) = \frac{1}{2} f''(x)$ である事を示せ．

Ex.3.2. *(線形 drift を持つブラウン運動)* $X_t = W_t + mt$ とし，$T_t f(x) = E_x[f(X_t)]$ とする．その時，前問と同様に定める $\{T_t\}_{t>0}$ の生成作用素 L は $Lf(x) = \frac{1}{2} f''(x) + m f'(x)$ である事を示せ．

Th.3.3. $f \in C^3(\mathbf{R})$ とする．$u(t,x) = E_x[f(W_t)]$ は熱方程式の初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,x) = f(x)$$

の解である．

4. 確率積分 (Stochastic Integral)

Ex.4.1. 今まで通り，これからも $\{W_t\}_{t>0}$ を $x \in \mathbf{R}$ を出発するブラウン運動とし，$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \le t\}$ とする．次を示せ．

(1) $\{W_t\}_{t\ge 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-*martingale* である．

(2) $\{W_t^2 - t\}_{t\ge 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-*martingale* である．

Ex.4.2. *(ブラウン運動の 2 次変分)*
以後，この節において $t > 0$ を一つ固定し，$t_k = \dfrac{k}{2^n}t$ とし，$X_k = W_{t_k}$ とする．

確率変数 Q_n を $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} |X_{k+1} - X_k|^2$ とする．次を示せ．

(1) $E[Q_n] = t$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}[Q_n] = 0.$ *Hint:* 各 $\{X_{k+1} - X_k\}_k$ は独立で，$N(0, t/2^n)$ に従う．

(3) *(1), (2)* より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E[\,|\sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1} - V_k)^2 - t|^2\,] = 0$, すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1} - V_k)^2 = t \quad in \quad L^2.$$

Ex.4.3. *(離散確率積分) Ex.1.4.* における $I(f)_n$ は「公平な賭け」のモデル化である．すなわち，f_{n-1} 円を賭ける n 回目の賭けの結果 ξ_n*(勝てば 1，負ければ-1)* は $E[\xi_n] = 0$ をみたす．f_{n-1} が $\mathcal{F}_{n-1}$-可測である事は，賭けにおいて いかさまがない戦略 である事を意味する．$I(f)_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}\xi_k$, $n = 0, 1, \cdots$ は，n 回目までの賭けの「もうけ」を表す．これを *martingale* $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ を用いて表すと，$\xi_n = M_n - M_{n-1}$ より $I(f)_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_{k-1}(M_k - M_{k-1})$ である．これを，戦略 $(f_n)_{n\ge 1}$ の *martingale* $\{M_n\}_{n\ge 1}$ による離散確率積分という．$\{M_n\}_{n\ge 1}$ が $(\mathcal{F}_n)$-*martingale* である事，および各 f_{n-1} が $\mathcal{F}_{n-1}$-可測である事から次を示せ：

(1) $\{I(f)_n\}_{n\geq 1}$ が $(\mathcal{F}_n)$-*martingale* である．

(2) もう一つのいかさまがない戦略 $(g_n)_{n\geq 1}$ に対して $E[I(f)_n \cdot I(g)_n] = \sum_{k=1}^{n} E[f_k \cdot g_k]$.

Def.4.4. *(確率積分) Ex.4.2.* の記号を用いる．$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は高々線形オーダーで増加する連続関数とする．$I^{(n)}(f) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f(X_k)(X_{k+1} - X_k)$ とする．ここで，$f(X_k)$ は X_k-可測であるから，これは，前問の離散確率積分と同様の性質を持つ．さらに，$\{I^{(n)}(f)\}_{n\geq 1}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ におけるコーシー列を成す事がわかり，空間の完備性より極限が存在する．それを $\int_0^t f(W_s)dW_s$ と書き，ブラウン運動による確率積分という．すなわち，

$$I^{(n)}(f) \to \int_0^t f(W_s)dW_s \qquad in \quad L^2(\Omega, P).$$

確率積分は離散確率積分と同様の性質を持つ；

(1) $\left\{\int_0^t f(W_s)dW_s\right\}_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-*martingale* である．

(2) $E\left[\left(\int_0^t f(W_s)dW_s\right)\left(\int_0^t g(W_s)dW_s\right)\right] = \int_0^t E[f(W_s)g(W_s)]ds.$

Th.4.5. *(伊藤の公式)* $f \in C^3(\mathbf{R})$ に対して

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds.$$

Ex.4.6. *Th.3.3.* を伊藤の公式を用いて証明せよ．

Ex.4.7. *(Exponential Martingale)* 各 $\sigma \in \mathbf{R}$ に対し，$\{exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2})\}_{t\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t)$-*martingale* である事を以下の仕方でしめせ.

(1)

(2) 伊藤の公式を用いて.