1. 大数の法則

Ex.1.1. 表の出る確率が p であるコインを繰り返し投げる.

(1) n 回目に初めて表が出るという事象を A_n とする.「いつかは表が出る」という事象 A を A_n たちを用いてあらわせ. 確率測度 P の σ-加法性を用いて $P(A)$ を求めよ.

(2) n 回目に 2 回目の表が出るという事象を B_n とする. $P(B_n)$ を求めよ.「いつかは *2* 回表が出る」という事象を B を B_n たちを用いて表し, $P(B)$ を求めよ.

Ex.1.2. 離散確率変数 X が確率分布 $P(X=k)=\dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{1}{k^2}$, $k=1,2,\cdots$ をもつとする. ただし, $c=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. このとき, X は可積分 *(*$E[|X|]<\infty$*)* か, すなわち X の期待値 $E[X]$ は存在するか. *Hint:* 講義で強調したように $E[X]$ が存在する $\iff$ $E[|X|]<\infty$.

Ex.1.3. *(*チェビシェフの不等式*)* X が *2* 乗可積分である *(*$E[|X|^2]<\infty$*)* である時, 任意の $\epsilon>0$ に対して $P(\,|X-E[X]|\geq\epsilon\,)\leq\dfrac{\mathrm{Var}[X]}{\epsilon^2}$ であることを証明せよ.

Ex.1.4. マルコフの不等式を用いて, X が可積分 *(*$E[|X|]<\infty$*)* ならば確率 *1* で $|X|<\infty$ であることをしめせ. *Hint:* 講義ノート.

Ex.1.5. *(*概収束の十分条件*)* 確率変数列 $X_n, n=1,2,\cdots$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty}E[|X_n|]<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}X_n=0,\quad P-a.s.$$

であることを以下の手順で確認せよ.

(1) 単調収束定理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}E[|X_n|]=E[\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|]$ だから, 仮定より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|$ は可積分関数である.

(2) *Ex.1.4.* より級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ は確率 *1* で収束する.

(3) 数列に関する基本的な事実「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0.$」より結論がなりたつ.

Def.1.6. 確率変数列 $X_1,X_2,\cdots$ および確率変数 X に対し,

(1) $\{X_n\}$ が X に概収束する *(*$X_n\to X,\ P-a.s.$*)* とは $P(\{\omega;\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\})=1$ が成立すること.

(2) $p \geq 1$ とする．$\{X_n\}$ が X に p 次平均収束する *(*$X_n \to X$ *in* L^p*)* とは

$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$ が成立すること．

(3) $\{X_n\}$ が X に確率収束する *(*$X_n \to X$ *in probability)* とは，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$ が成立すること．

Th.1.7. *(大数の弱法則)* $X_1, X_2, \cdots$ は独立かつ同分布で $E[X] = m$ および $\mathrm{Var}[X] = v$ が存在するものとする．そのとき，各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して確率変数 $\hat{S}_n$ を

$$\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

とすると，$\hat{S}_n$ は m に確率収束する．

Ex.1.8. 大数の弱法則を証明しよう．

(1) $\mathrm{Var}[\hat{S}_n]$ を計算せよ．

(2) チェビシェフの不等式を用いて大数の弱法則を証明せよ．

Th.1.9. *(大数の強法則)* $X_1, X_2, \cdots$ は独立かつ同分布で $E[|X|^4] < \infty$ であるとする．*(*この仮定の下，シュワルツの不等式の応用より $E[X] = m$ および $\mathrm{Var}[X] = v$ が存在する．*)* そのとき，$\hat{S}_n$ は m に概収束する．

Ex.1.10. 大数の強法則を証明しよう．*(志賀 P130.)*

(1) $m \neq 0$ である場合も $m = 0$ である場合に帰着される．その理由を説明せよ．

Hint: $\hat{S}_n - m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)$ をチェックせよ．

(2) 以後 $m = 0$ であるとする．独立性の条件を用いて

$$E[|X_1 + \cdots + X_n|^4] = \sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^4] + 6\sum_{i\neq j}^{n} E[X_i^2 X_j^2]$$

であることをしめせ．

(3) 各 X_i が同分布である事とシュワルツの不等式を用いて

$$\sum_{i\neq j}^{n} E[X_i^2 X_j^2] \leq \frac{n(n-1)}{2} E[X_1^4]$$

であることをしめせ．結局 $E[|\hat{S}_n|^4] \leq \frac{3E[|X_1|^4]}{n^2}$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} E[|\hat{S}_n|^4] < \infty$ を示せ．

(4) *(3)* の最後の結果より，*Ex.1.5.* を用いて大数の強法則を結論せよ．

2. 中心極限定理

Ex.2.1. 平均 m 分散 v の正規分布 $N(m,v)$ の密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\dfrac{1}{2v}(x-m)^2\right)$ に対し

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ をたしかめよ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=m$ および $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x-m|^2 f(x)dx=v$ を確かめよ.

(3) $m=0,\ v=1$ の時，特性関数 $\phi(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f(x)dx=e^{-\frac{t^2}{2}}$ を確かめよ.

Ex.2.2. 表の出る確率が $\frac{2}{3}$ のコインを *180000* 回投げる．表の出る回数 S_{180000} について、確率 $P(115000<S_{180000}<130000)$ をドモアブル-ラプラスの定理を用いて近似するとき、次の式を満たす a,b を求めよ.

$$P(115000<S_{180000}<130000)\asymp\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

Def.2.3. *(志賀 P136)* 確率変数 X に対しその特性関数を $\phi_X(t)=E[e^{itX}]$ と定義する.

Th.2.4. 特性関数に関する重要な定理.

(1) *(一意性定理)* 特性関数は確率変数の分布を一意的に特徴づける．すなわち，もし X と Y の特性関数が一致すれば X と Y は同じ確率分布をもつ.

(2) *(志賀 P141)* 特性関数の各点収束は，分布の弱収束と同値である. すなわち，確率変数列 $X_1,X_2,\cdots$ およびある確率変数 X に対し

$$\lim_{n\to\infty}\phi_{X_n}(t)=\phi_X(t),\ \text{各点収束}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}P(a\le X_n\le b)=P(a\le X\le b),\ \forall a<\forall b.$$

Ex.2.5. X と Y が独立であって共に $N(0,1)$ に従うとき，$\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ がまた $N(0,1)$ に従うことを一意性定理を用いて示せ.

Ex.2.6. $X_1,X_2,\cdots$ が独立かつ $N(0,1)$ に従う確率変数列であるとする．すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$ が $N(0,1)$ に従う事を帰納法を用いてしめせ.

Ex.2.7. $N(0,1)$ にしたがう X に対して $Y=X^2$ の特性関数 $\phi_Y(t)$ を $\phi_Y(t)=\displaystyle\int e^{itx}f_Y(y)dy$ とあらわすことにより、Y の確率分布の密度関数 $f_Y(x)$ を求めよ．ヒント：*Th.2.4. (1).*

Ex.2.8. $\{X_n\}_{n=1,2,\cdot}$ が平均 m の独立同分布な確率変数列であるとする．$U_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の特性関数 $\phi_n(t)$ は $\phi_n(t) \to e^{imt}$ であることをしめせ．*Th.2.4. (2)* より U_n の分布は δ_m に収束する事 をしめせ.

Th.2.9. *(*中心極限定理，志賀 *P142)* $X_1, X_2, \cdots$ が独立かつ同分布の確率変数列とし，$m = E[X_i]$ および $v = Var[X_i] > 0$ が存在するものとする．そのとき，任意の $a < b$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k - m}{\sqrt{v}} \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Ex.2.10. 中心極限定理の証明のために以下の事実を確かめよう.

(1) 一般に，確率変数 X が $E[X^2] < \infty$ を満たすならばルベーグの優収束定理を用いて $\lim_{t\to 0} E\left[\, t|X|^3 \wedge |X|^2 \,\right] = 0$ である事をしめせ.

(2) 任意の実数 x に対して

$$\left| e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \le \frac{1}{6}|x|^3 \wedge |x|^2.$$

であることを確かめよ.

(3) $E[X] = 0,\ Var[X] = 1$ であるとき，X の特性関数 $\phi_X(t)$ は次を満たす事をしめせ.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left|\phi(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)\right| = 0.$$

Ex.2.11. 前問で確かめた事を用いて中心極限定理を証明しよう．$X_1, X_2, \cdots$ を平均 *0*、分散 *1* の独立同分布な確率変数列であるとする．このとき、

(1) $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$ の特性関数 $\phi_{\bar{Z}_n}$ にたいし $\phi_{Z_n}(t) = \left\{\phi_{X_1}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n$ をしめせ.

(2) $\phi_{Z_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ $(n \to \infty)$ をしめせ．*(*t は固定し，$n \to \infty$ としていることに注意．*)*

(3) *Th.2.4.* をもちいて中心極限定理をしめせ

Ex.2.12. $(-1, 1)$ 上一様に分布する独立確率変数列にたいする中心極限定理を考える事により次の等式をしめせ：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{a}\sin\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{a^2}{6}}.$$