

## 1. 微積分学からの復習

Ex.1.1. (1)  $|x| < 1$  において  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$  であることを示せ. *Hint*: 等比級数の和の公式.

(2) 整級数の項別微分可能性について知られている定理を述べよ. ([M] P150.)

(3)  $|x| < 1$  において整級数  $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$  および  $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$  で表される関数を求めよ.

Ex.1.2.  $M > 0$  とする.

(1)  $0 < x \leq M$  ならば、すべての自然数  $n$  に対して次の不等式がなりたつことを示せ.

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

ヒント:  $0 < t < M$  のとき、 $1 < e^t < e^M$ , これを  $0$  から  $x$  まで積分すると  $x < e^x - 1 < xe^M$ . すなわち上の不等式は  $n = 0$  の時なりたつ. 後は帰納法.

(2) 任意の  $M > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{n!} = 0$  であることを用いて、すべての  $x \geq 0$  に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

が成り立つ事をしめせ. (この式はすべての  $x \in \mathbf{R}$  に対して成立する. [M], P155.)

Ex.1.3. 微積分学の基本定理 (定積分と不定積分 ([M], P56)) より連続関数  $f$  および微分可能な関数  $g$  に対して等式

$$\frac{d}{dx} \int_0^{g(x)} f(y) dy = f(g(x))g'(x)$$

が成り立つ事をしめせ.

Ex.1.4. 広義積分について復習せよ. ([M], P67.) 以下の広義積分は存在するか. もし存在すればその値をもとめよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Ex.1.5. 重積分を累次積分に置き換える方法を復習せよ. ([M], P111.) それを用いて

(1)  $\int_D xy^2 dx dy$ ,  $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq y \leq 1\}$  を計算せよ.

(2)  $\int_D e^{-\lambda(x+y)} dx dy$ ,  $D = \{(x, y); x, y \geq 0, x + y \leq z\}$  を計算せよ. ただし  $\lambda > 0, z > 0$  は定数とする.

**Ex.1.6.** (Gauss 積分、極座標変換 [M] P119)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  をしめせ . さらに、 $v > 0$  に対して  $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2v}} dx = 1$  を示せ .

**Ex.1.7.** 広義積分  $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  を求めよ . また部分積分を 1 回用いて広義積分  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  を求めよ .

**Ex.1.8.** 各  $z > 0$  に対して  $D_z = \{(x, y); x, y \geq 0, \frac{x+y}{\sqrt{2}} \leq z\}$  とする . また  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$  とする .  $z$  ごとに定まる重積分  $\int_{D_z} f(x)f(y) dx dy$  に対してその  $z$  による微分  $\frac{d}{dz} \int_{D_z} f(x)f(y) dx dy$  を計算せよ . Hint: 重積分を累次積分で書く . Ex.1.3. を用いる .

**Ex.1.9.**  $|\rho| < 1$  とする .  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を次で定義されるものとする :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right).$$

(1) 広義積分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 x_2) dx_1$  をもとめよ . これを用いて  $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, x_2) dx_1 dx_2 = 1$  をしめせ . Ex.1.6. の結果を用いてよい .

(2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  とおくと、上の  $f$  は以下であらわされることを示せ .

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det A}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A^{-1}\mathbf{x})\right\}, \quad \text{ただし } (\mathbf{x}, A^{-1}\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1,2} (A^{-1})_{ij} x_i x_j.$$

(3)  $A^{-1}$  は実対称行列なので対角化できる . すなわちある直交行列  $B$  および対角行列  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  が存在して  $A^{-1} = {}^t B \Lambda B$  とできる . ([線形], P181.) これより、 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  を  $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$  とおくと  $(\mathbf{x}, A^{-1}\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$  であることを示せ .

(4) (3) および Ex.1.6. の結果を利用して、 $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$  という変数変換 ([M], P118) を実行することにより  $\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$  をしめせ .

## 2. 初等的な確率論-有限確率空間

Def.2.1. 根元事象の集まりを標本空間とよび  $\Omega$  と書く. 任意の事象はいくつかの根元事象の集まりからなる  $\Omega$  の部分集合である. どの根元事象も同様に確からしい試行において, 事象  $A$  の起こる確率  $P(A)$  は

$$P(A) = \frac{A \text{ に含まれる根元事象の個数}}{\text{すべての根元事象の個数}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Prop.&Def.2.2. Def.2.1. における確率は以下の性質をもつ.

- (1) すべての事象  $A$  に対して  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- (2) 全事象の確率:  $P(\Omega) = 1$ . 空事象の確率:  $P(\phi) = 0$ .
- (3) 特に  $A$  と  $B$  が排反であるとき  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ . (確率の加法性)

逆に、一般に集合  $\Omega$  の部分集合の集まり  $\mathcal{F}$  の上に定義された関数  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$  で、上の条件をみたすものを確率という.  $(\Omega, \mathcal{F})$  上に確率があたえられた時  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間という.

Prop.2.3. 確率  $P$  は上の (1)(2)(3) の他に以下の性質をみたす.

- (4) 余事象の確率:  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .
- (5)  $A \subset B$  ならば  $P(A) \leq P(B)$ .
- (6) 事象  $A, B$  に対して  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Th.2.4. (2項係数、2項定理)

- (1) 1 から  $n$  までの番号のついた  $n$  枚のカードから  $k$  枚のカードを選び出す時、その選び出し方は

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} \quad (2 \text{項係数})$$

通りである. (右辺の分数において分母も分子も  $k$  個の数の積であることに注意.)

- (2) 2項定理: すべての  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して、 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

Ex.2.5. 組み合わせの考えを用いて次を示せ.

$$(1) \binom{r}{k} = \binom{r}{r-k} \quad (2) \binom{r+1}{k} = \binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} \quad (3) \binom{2r}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \binom{r}{r-k}$$

**Note.2.6.** (独立試行) 以後、コインやサイコロをくりかえし投げる等の試行を繰り返し行うとき、とき、各回試行  $X_k, k = 1, \dots$  は 独立 であると仮定している。すなわち、 $A_k$  を試行  $X_k$  によって起こる事象とすれば、いつでも

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$$

がなりたつものと仮定する。

**Prop.2.7.** (反復試行=独立同試行) あるコインを投げると表 (*Head*) の出る確率が  $p$  (ただし  $0 < p < 1$ ), 裏 (*Tail*) の出る確率が  $q = 1 - p$  であるとする。このコインを  $n$  回投げる試行を考える。  $k$  回目の試行で表がでたら 1、裏がでたら 0 を対応させることにして、この試行の標本空間を  $\Omega = \{\omega = (x_1, \dots, x_n); x_j \in \{1, 0\}\}$  ととる。

(1) 各  $\omega = (x_1, \dots, x_n)$  に対して  $\ell = \sum_{j=1}^n x_j$  とすると  $P(\{\omega\}) = p^\ell q^{n-\ell}$  をしめせ。

(2) 各  $k = 0, \dots, n$  に対して  $P(\text{表が } k \text{ 回でる}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  をしめせ。

**Def.2.8.** 確率変数とは確率空間上の実数値関数のことである。根元事象の個数が有限であるような確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の確率変数  $X$  の期待値  $E[X]$  を

$$E[X] = \sum_{\omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

と定義する。(仮定より右辺は有限個の和なのでいつでも存在する。)

**Ex.2.9.** 1 から  $n$  までの数字を 1 つずつ書いた  $n$  枚のカードがある。(  $n \geq 2$  )

(1) この  $n$  枚のカードから一度に 2 枚選び、大きい方の数字を  $X$  とする。この試行に対応する標本空間  $\Omega$  を構成し、確率変数  $X$  を  $\Omega$  の上の関数として定義せよ。  $X$  の期待値  $E[X]$  を求めよ。

(2) この  $n$  枚のカードから 1 枚選び、その数字を  $X_1$  とする。そのカードを元に戻し、改めて 1 枚選び、その数字を  $X_2$  とする。  $X_1$  と  $X_2$  の小さくない方の数字を  $Y$  とする。この試行に対応する標本空間  $\Omega$  を構成し、確率変数  $Y$  を  $\Omega$  の上の関数として定義せよ。  $Y$  の期待値  $E[Y]$  を求めよ。

### 3. 離散確率空間、確率変数とその確率分布

**Note.3.1.** 以後、この章全体において、 $\Omega$  は離散確率空間とする。すなわち根元事象の個数  $\#\Omega$  は高々可算集合 (有限個または可算無限個) であるとする。

**Def.3.2.** ([O] P5)  $\Omega$  を標本空間、 $\mathcal{F}$  を事象の全体 (ある  $\Omega$  の部分集合の集まり) とする。 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$  が以下の条件をみたすとき、 $P$  を確率、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間という。

- (1) すべての  $A \in \mathcal{F}$  に対して  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- (2)  $P(\Omega) = 1$ . (全事象の確率は 1.)
- (3) 有限個または可算無限個からなる事象の列  $A_1, A_2, \dots$  が たがいに排反であれば

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k). \quad (\text{確率の } \sigma\text{-加法性})$$

(3') 特に、 $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$  である。

**Prop.3.3.** 確率  $P$  は以下の性質をみたす。

- (1)  $P(\phi) = 0$ . (空事象の確率は 0.)
- (2)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ . (余事象の確率)
- (3)  $A \subset B$  ならば  $P(A) \leq P(B)$ . (確率の単調性)
- (4) 2つの事象  $A, B$  に対して  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**Ex.3.4.** ([O] P103, コイン投げ (ベルヌーイ試行) の無限試行の確率空間) コインを何回も繰り返し投げる試行の標本空間として  $\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, \dots); x_k = 1 \text{ または } 0.\}$  をとることができる。 $A_n$  を  $n$  回目に表が出るという事象とする。すなわち  $A_n = \{\omega = (x_1, x_2, \dots); x_n = 1\}$  とする。以下の事象を  $A_n$  たちをもちいて表せ。

- (1) 最初から  $n$  回表がつづく。(2) 偶数回目は表ばかり。(3) いつかは表がでる。

**Def.3.5.** (確率変数とその確率分布、[O] P36)

- (1) 確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の実数値関数  $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を確率変数という。
- (2)  $X$  のとり得る値の全体を  $ImX$  とする。各  $x \in ImX$  に対して

$$p_x = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\})$$

とおくと、 $p_x \geq 0$  かつ  $\sum_{x \in Im X} p_x = 1$  である。  $x \rightarrow p_x$  を  $X$  の確率分布 (probability law) という。

- (3) 一般に、(2) で述べた性質をみたす  $x \rightarrow p_x$  を離散分布という。  $X$  の確率分布が、次  $Ex$ . に現れるようなある特定の離散分布 (例えば「幾何分布  $Ge(p)$ 」) であるとき、「 $X$  は幾何分布  $Ge(p)$  にしたがう」という。

**Ex.3.6.** 以後、コインを投げて (ベルヌーイ試行) 表 (Head) の出る確率を  $p$  (ただし  $0 < p < 1$ ), 裏 (Tail) の出る確率を  $q = 1 - p$  とする。以下を確認せよ。

- (0) このコインを 1 回投げて表が出たら  $X = 1$ 、裏が出たら  $X = 0$  とする。確率変数  $X$  はベルヌーイ分布 ( $Be(p)$ ) にしたがう。すなわち  $P(X = 1) = p$ ,  $P(X = 0) = q$ .
- (1) コインを  $n$  回投げて表の出る回数を  $X$  とする。確率変数  $X$  は 2 項分布 ( $B(n, p)$ ) にしたがう: すなわち  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .
- (2) コインくりかえし投げて、初めて Head がでるまでに裏 (Tail) が出る回数を  $X$  とする。 $X$  は幾何分布 ( $Ge(p)$ ) にしたがう: すなわち  $P(X = n) = q^n p$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

**Ex.3.7.** ([O] P43) 以下の対応  $\{k \rightarrow p_k\}$  が離散分布であることを示せ。

確率分布	$k$	$p_k$
1. ベルヌーイ分布 ( $Be(p)$ ):	$k = 1, k = 0$	$p_1 = p, p_0 = 1 - p (= q)$ .
2. 2 項分布 $B(n, p)$ :	$k \in \{0, 1, \dots, n\}$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .
3. 幾何分布 $Ge(p)$ :	$k \in \{0, 1, \dots\}$	$p_k = q^k p$ .
4. Poisson 分布 $Po(\lambda)$ :	$k \in \{0, 1, \dots\}$	$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

**Ex.3.8.** ([O] P110, Poisson の少数法則) 2 項分布  $B(n, p)$  の  $np = \lambda$  を保ちながら  $n \rightarrow \infty$  にする極限を考えると Poisson 分布  $Po(\lambda)$  が現れる、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

## 事象の独立性、確率変数の独立性

**Def.3.9.** (条件付き確率、事象の独立性)

(1) 事象  $B$  が  $P(B) > 0$  とする時、 $B$  の下での  $A$  の条件付き確率  $P(A|B)$  を次で定義する .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

(1) 事象  $A$  と事象  $B$  が独立  $\iff P(A|B) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

(2) 事象  $A_1, A_2, \dots, A_n$  が独立  $\iff$

$$\{1, \dots, n\} \text{ の任意の部分列 } \{i_1, \dots, i_k\} \text{ に対して } P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

**Ex.3.10.** 事象  $A$  と事象  $B$  が独立であるとする .  $A$  と  $B^c$  が独立であることを示せ . また  $A^c$  と  $B^c$  が独立であることを示せ .

**Ex.3.11.** 表が出る確率が  $\frac{1}{2}$  のコインを 3 回なげる . 1 回目と 2 回目と同じ面である事象を  $A$ 、2 回目と 3 回目と同じ面である事象を  $B$ 、3 回目と 1 回目と同じ面である事象を  $C$  とする .  $A$ 、 $B$ 、 $C$  は独立か .

**Def.3.12.** (確率変数列の独立性) 確率変数列  $X_1, X_2$  が独立 .

$\iff$  任意の実数の部分集合  $A_1, A_2$  に対して事象  $\{X_1 \in A_1\}$  と  $\{X_2 \in A_2\}$  が独立 .

$\iff$  任意の  $A_1, A_2$  に対して  $P(X_1 \in A_1 \text{ かつ } X_2 \in A_2) = P(X_1 \in A_1)P(X_2 \in A_2)$  .

**Prop.3.13.** 確率変数列  $X_1$  と  $X_2$  が独立ならば、任意の関数  $f_1, f_2$  に対して  $f_1(X_1)$  と  $f_2(X_2)$  も独立である .

**Def&Prop.3.14.** ([O] P72) 一般に 2 つの確率変数  $X, Y$  があたえられたとき、2 変数の関数

$$(x, y) \rightarrow p(x, y) = P(X = x \text{ かつ } Y = y)$$

を  $X, Y$  の同時確率分布 (joint probability law) という . 同時確率分布  $p(x, y)$  から  $X$  の確率分布  $p_X(x)$  は次の式によってあたえられる .

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y).$$

**Ex.3.15.**  $\{1, 0\}$  に値をとる 2 つの確率変数  $X, Y$  に対してその同時確率分布  $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ ,  $i, j = 1, 0$  が  $p_{11} = \frac{1}{8}$ ,  $p_{10} = \frac{2}{8}$ ,  $p_{01} = \frac{2}{8}$ ,  $p_{00} = \frac{3}{8}$ , であるとき、 $P$  の確率分布  $P(X = i)$ ,  $i = 1, 0$  を求めよ。  $X$  と  $Y$  は独立か。

**Ex.3.16.**  $X$  と  $Y$  は独立、かつともに  $-1$  および  $1$  をそれぞれ確率  $\frac{1}{2}$  でとるものとする。  $Z = XY$  とする。  $X, Y, Z$  は組ごとに独立であることをしめせ。これらは独立か。

**Ex.3.17.**  $X_1$  および  $X_2$  をベルヌーイ分布  $Be(p)$  にしたがう独立な確率変数とし、(すなわち  $P(X_i = 1) = p$ ,  $P(X_i = 0) = q$ ,  $i = 1, 2$ )、  $X = \min\{X_1, X_2\}$ ,  $Y = \max\{X_1, X_2\}$  とする。そのとき  $X$  と  $Y$  は独立か。

**Ex.3.18.**  $A$  さんと  $B$  さんが繰り返しコインを投げてそれぞれ初めて表がでるまでに裏が出る回数を  $X, Y$  とする。このとき  $Z = \min\{X, Y\}$  の確率分布を調べたい。

- (1) 加法性をもちいて各  $n \geq 0$  に対して  $P(X \geq n) = q^n$  を示せ。
- (2) 試行の独立性をもちいて  $P(Z \geq n)$  をもとめよ。
- (3)  $P(Z = n)$  をもとめよ。

**Th.3.19.** ([O] P80, 離散確率変数の和の分布)  $X, Y$  を独立な整数値確率変数とする。そのとき、任意の  $z \in \mathbf{Z}$  に対して

$$P(X + Y = z) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} P(X = x)P(Y = z - x)$$

である。特に  $X, Y$  が共に非負整数値をとる時、

$$P(X + Y = z) = \sum_{x=0}^z P(X = x)P(Y = z - x)$$

**Ex.3.20.**  $A$  さんが  $n$  回  $B$  さんが  $m$  回コインを投げ、表が出る回数をそれぞれ  $X$  回、 $Y$  回とする。  $X + Y$  がしたがう確率分布を求めよ。

**Ex.3.21.** ([O] P89)  $X, Y$  は独立な確率変数で、それぞれ平均  $\lambda, \mu$  の Poisson 分布に従うとき、  $X + Y$  の確率分布は平均  $\lambda + \mu$  の Poisson 分布であることを示せ。



**Ex.3.22.**  $X, Y$  は独立な確率変数で、それぞれ Poisson 分布  $Po(\lambda), Po(\mu)$  に従うとき、次を示せ .

$$P(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

**Ex.3.23.**  $X, Y$  は独立な確率変数で、ともに幾何分布  $Ge(p)$  に従うとき、次を示せ .

$$P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq k \leq n$$

**Ex.3.24.** ([O] P49, 負の 2 項分布)  $X_1, \dots, X_n$  を幾何分布  $Ge(p)$  にしたがう独立な確率変数列とする . (もちろん、 $q = 1 - p$  としている .)

(1)  $x = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $P(X_1 + X_2 = x)$  を求めよ .

(2) 帰納法を用いて  $x = 0, 1, 2, \dots$  に対して次の等式をしめせ .

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = x) = \binom{x+n-1}{n-1} p^n q^x.$$

Hint:  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$  と  $Y = X_n$  は独立である . よって  $X, Y$  の確率分布がわかっているとき、 $X + Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  の分布も Th.3.19. より計算できる .

**Ex.3.25.**  $n \geq 1$  を固定する . 前問で現われた  $x \rightarrow \binom{x+n-1}{n-1} p^n q^x$  について考える .

(1)  $\binom{x+n-1}{n-1}$  は  $x$  個の黒玉と  $n-1$  の白玉を 1 列に並べる並べかたの総数である事に注意して 負の 2 項定理 と呼ばれる次の公式を示せ :

$$(1-t)^{-n} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+n-1}{n-1} t^x, \quad \forall t \in \mathbf{C} \text{ such that } |t| < 1.$$

Hint:  $(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \dots$  である . その  $n$  乗を展開して  $t^x$  の係数がどうなるか組み合わせの考えから決めよ .

(2) 負の 2 項定理より  $\sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+n-1}{n-1} p^n q^x = 1$  をしめせ . 離散分布

$$x \rightarrow \binom{x+n-1}{n-1} p^n q^x, \quad x = 0, 1, \dots$$

を 負の 2 項分布  $NB(n, p)$  という .

#### 4. 確率変数の期待値と分散

**Def.4.1.** (確率変数の期待値)  $X = X(\omega)$  を  $\Omega$  上の確率変数とする .

(1)  $\sum_{\omega} |X(\omega)|P(\omega) < \infty$  (正項級数が収束する) とき、級数  $\sum_{\omega} X(\omega)P(\omega)$  が存在するので、それを  $X$  の期待値といい、 $E[X]$  と書く . すなわち

$$E[X] = \sum_{\omega} X(\omega)P(\omega).$$

(2) 級数  $\sum_{\omega} |X(\omega)|P(\omega) = \infty$  のとき  $X$  の期待値は存在しないといい  $E[|X|] = \infty$  と書く .

**Ex.4.2.** 表に 1、裏に 2 と書かれた大、小 2 個のコインを投げて、出た目の数をそれぞれ  $X, Y$  とする .  $|X - Y|$  の平均と分散をもとめよ .

**Prop.4.3.** (期待値の性質)  $X, Y$  を期待値  $E[X], E[Y]$  が存在する確率変数とする .

- (1) 任意の定数  $a, b$  に対して  $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ .
- (2)  $X \geq 0$ 、すなわちすべての  $\omega \in \Omega$  に対して  $X(\omega) \geq 0$  ならば  $E[X] \geq 0$ .
- (3)  $X = 1$ 、すなわちすべての  $\omega \in \Omega$  に対して  $X(\omega) = 1$  ならば  $E[X] = 1$ .
- (4) 任意の事象  $A \subset \Omega$  に対して  $E[1_A] = P(A)$ . ただし、確率変数  $1_A$  は事象  $A$  の指示関数、すなわち  $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A, \\ 0 & \text{if } \omega \notin A. \end{cases}$

**Th.4.4.** 確率変数  $X$  は確率分布  $x \rightarrow p_x$  にしたがうものとする . 関数  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  に対して

$\sum_{x \in \text{Im}X} |g(x)|p_x < \infty$  ならば  $E[g(X)]$  が存在し

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \text{Im}X} g(x)p_x = \sum_{x \in \text{Im}X} g(x)P(X = x)$$

である . 特に  $\sum_{x \in \text{Im}X} |x|p_x < \infty$  ならば  $E[X]$  が存在し  $E[X] = \sum_{x \in \text{Im}X} xp_x$  である .

**Def.&Prop.4.5.** 確率変数  $X$  の期待値  $m = E[X]$  が存在するとする . そのとき、

$$\text{Var}[X] = E[(X - m)^2] = E[X^2] - m^2$$

を  $X$  の分散という .  $E[X^2] = \infty$  の時、分散は存在しないといい  $\text{Var}[X] = \infty$  と書く .

- (1)  $X$  が離散分布  $x \rightarrow p_x$  にしたがうとき  $\text{Var}[X] = \sum_x x^2 p_x - m^2 = \sum_x x^2 P(X = x) - m^2$ .
- (2) ([O] P61) 任意の定数  $a, b$  に対して  $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$  である .

**Ex.4.6.** (幾何分布に従う確率変数の平均と分散) *Ex.1.1.* の結果を用いて幾何級数  $Ge(p)$  に従う確率変数  $X$  に対して  $E[X] = \frac{q}{p}$ ,  $Var[X] = \frac{q}{p^2}$  であることを示せ .

**Ex.4.7.** *Poisson* 分布  $Po(\lambda)$  にしたがう確率変数  $X$  に対して  $E[X] = \lambda$ ,  $Var[X] = \lambda$  であることを示せ .

**Def.& Prop.4.8.** ([O] P44) 確率変数  $X$  は確率分布  $x \rightarrow p_x$ ,  $ImX = \{0, 1, \dots\}$  にしたがうものとする . 前定理より、 $z \in \mathbf{R}$  に対して  $\sum z^x p_x < \infty$  ならば期待値  $E[z^X]$  が存在する . このような  $z$  全体の上で定義される関数

$$G_X(z) = E[z^X] = \sum z^x p_x$$

を  $X$  の母関数と呼ぶ .  $X$  が 2 項分布  $B(n, p)$ 、幾何分布  $Ge(p)$ 、*Poisson* 分布  $Po(\lambda)$  にしたがうとき、それらの母関数はそれぞれ以下であたえられる事をしめせ .

$$G_X(z) = (pz + q)^n, (B(n, p) \text{ の場合}), \quad \frac{p}{1 - zq}, (Ge(p) \text{ の場合}), \quad e^{\lambda(z-1)}, (Po(\lambda) \text{ の場合}).$$

**Prop.4.9.** ([O] P77) 確率変数  $X, Y$  の同時確率分布を  $p(x, y)$  とすると、任意の関数  $g(x, y)$  に対して

$$E[g(X, Y)] = \sum_{\omega \in \Omega} g(X(\omega), Y(\omega))P(\omega) = \sum_{(x, y)} g(x, y)p(x, y)$$

である .

**Th.4.10.** ([O] P79) 2 つの確率変数  $X, Y$  が独立ならば次が成立する .

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

さらに、*Prop.3.13.* より任意の関数  $f, g$  に対して次が成立する .

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)].$$

**Th.4.11.** ([O] P90, 分散の加法性)  $x_1, \dots, X_n$  が独立な確率変数であるとき、

$$Var[X_1 + \dots + X_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n].$$

**Ex.4.12.** (2項分布に従う確率変数の平均と分散) コインを  $n$  回なげ、表の出る回数を  $X$  とする.  $E[X]$  および  $\text{Var}[X]$  を次のように求めよ.

(1) 事象  $A_k, k = 1, \dots, n$  を  $A_k = \{k \text{ 回目に表がでる.}\}$  とする.  $E[1_{A_k}]$  および  $\text{Var}[1_{A_k}]$  を求めよ.

(2) 確率変数列  $1_{A_1}, \dots, 1_{A_n}$  は独立な確率変数列であり、 $X = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$  であることに注意して  $E[X]$  および  $\text{Var}[X]$  を求めよ.

**Def.& Prop.4.13.** ([O] P83, 確率変数の共分散) 2つの確率変数  $X, Y$  がそれぞれ平均  $m_X, m_Y$  をもつとする. このとき、 $X, Y$  の共分散  $\text{Cov}(X, Y)$  を

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y$$

とおく. (明らかに  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$  である.)  $X, Y$  の同時確率分布が  $p(x, y)$  であるとき、前 Prop. より  $\text{Cov}(X, Y) = \sum_{(x,y)} xyp(x, y) - m_X m_Y$ . である.

**Ex.4.14.** 同時確率分布が Ex.3.15. においてあたえられる確率変数  $X, Y$  に対してその共分散  $\text{Cov}(X, Y)$  を求めよ.

**Ex.4.15.**  $X_1$  および  $X_2$  をベルヌーイ分布  $Be(p)$  にしたがう独立な確率変数とし、(すなわち  $P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = q, i = 1, 2$ )、 $X = \min\{X_1, X_2\}, Y = \max\{X_1, X_2\}$  とする. そのとき  $X$  と  $Y$  の共分散  $\text{Cov}(X, Y)$  を求めよ.

**Ex.4.16.** 1 から  $n$  まで番号のついた  $n$  個の箱のいずれかにボールを入れる試行を繰り返す. 毎回、どの箱にも確率  $\frac{1}{n}$  でボールが入るものとする. この試行を  $r$  回繰り返す時、箱 1 に入るボールの個数を  $X_1$ 、箱 2 に入るボールの個数を  $X_2$  とする. そのとき

(1)  $E[X_1], \text{Var}[X_1]$  を求めよ.

(2)  $E[X_1 X_2]$  を求め、 $\text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{r}{n^2}$  であることを示せ.

Hint: 事象の列  $A_k^1, k = 1, 2, \dots, r$  および  $A_k^2, k = 1, 2, \dots, r$  を

$$A_k^{(1)} = \{k \text{ 番目の試行で箱 1 に入る}\}, \quad A_k^{(2)} = \{k \text{ 番目の試行で箱 2 に入る}\}$$

とする. そのとき確率変数列  $1_{A_1^{(1)}}, \dots, 1_{A_r^{(1)}}$  および  $1_{A_1^{(2)}}, \dots, 1_{A_r^{(2)}}$  はそれぞれ独立な確率変数列であり、 $X_1 = 1_{A_1^{(1)}} + \dots + 1_{A_r^{(1)}}$ ,  $X_2 = 1_{A_1^{(2)}} + \dots + 1_{A_r^{(2)}}$  である.

## 5. 連続確率変数

**Def.& Prop.5.1.** ([O] P39) 確率変数  $X$  に対して  $F_X(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  を  $X$  の分布関数という.  $F$  は右連続な単調増加関数であり  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  をみたす.  $F_X$  がジャンプでのみ増加するとき、 $X$  を 離散確率変数、 $F_X$  が連続関数のとき  $X$  を 連続確率変数 という.

**Def.& Prop.5.2.** ([O] P51)  $X$  が連続確率変数で、その分布関数  $F_X$  が区分的に微分できるとき、 $f_X(x) = F'_X(x)$  を  $X$  の密度関数という.  $f_X$  は  $f_X \geq 0$  かつ  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  をみたす. また任意の  $a < b$  に対して次がなりたつ:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

**Prop.5.3.** 連続確率変数  $X$  に対して、任意の関数  $g$  に対して

$$E[g(X)] = \int g(x) f_X(x) dx$$

である. とくに  $X$  の平均  $m$ 、分散  $v$  は以下であたえられる:

$$m = E[X] = \int x f_X(x) dx, \quad v = \text{Var}[X] = E[X^2] - m^2 = \int x^2 f_X(x) dx - m^2.$$

**Ex.5.4.** 以下の  $f$  が確率分布を定めること:  $f \geq 0$  かつ  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  をたしかめよ.

(1) 一様分布  $U(a, b)$ :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } x \in (a, b) \\ 0 & \text{if } x \notin (a, b). \end{cases}$

(2) パラメータ  $\lambda$  の指数分布  $\text{Exp}(\lambda)$ :  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$

(3) 平均  $m \in \mathbf{R}$ , 分散  $v > 0$  の正規分布  $N(m, v)$ :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2v}(x-m)^2\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

**Ex.5.5.** 以下の連続確率分布の平均と分散が以下になる事を確かめよ.

確率分布	平均	分散	特性関数 $\phi_X(t) = E[e^{itX}]$
1. 一様分布 $U(a, b)$ ;	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb} - e^{ita})$
2. 指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ ;	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
3. 正規分布 $N(m, v)$ ;	$m$	$v$	$e^{imt - \frac{1}{2}vt^2}$

**Ex.5.6.** 連続確率変数  $X$  の分布関数  $F_X$  を用いて、確率変数  $Y = aX + b$ ,  $Y = X^2$ 、および  $Y = |X|$  の分布関数  $F_Y$  をあらわせ。

**Ex.5.7.**  $X$  がパラメータ  $\lambda$  の指数分布に従うとき、(1)  $A = 2X + 5$ , (2)  $B = e^X$ , (3)  $C = \frac{1}{1+X}$  の確率分布の密度関数をもとめよ。

*Hint:* それぞれの分布関数  $F$  を計算せよ。密度関数  $f$  は  $f(x) = F'(x)$  である。

**Ex.5.8.**  $X$  を標準正規分布  $N(0, 1)$  にしたがう確率変数であるとする。 $Y = |X|$  の密度関数をもとめよ。 $Y$  の平均と分散をもとめよ。

**Def.5.9.** 確率変数  $X, Y$  にたいして  $\mathbb{R}^2$  上の非負値関数  $f_{X,Y}(x, y)$  があって、任意の  $a < b, c < d$  にたいして

$$P(a < X \leq b \text{ かつ } c < Y \leq d) = \int_a^b dx \int_c^d f_{X,Y}(x, y) dy$$

であるとき、 $f_{X,Y}(x, y)$  を  $X, Y$  の同時密度関数という。 $f_{X,Y}(x, y)$  は  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{X,Y}(x, y) = 1$  をみたす。

**Prop.5.10.**  $X$  と  $Y$  が独立であるとき  $X, Y$  の同時密度関数  $f_{X,Y}(x, y)$  は次をみたす：任意の  $x, y$  にたいして

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

**Ex.5.11.** (一様分布)  $X, Y$  が  $(0, 1)$  上一様に分布する独立な確率変数であるとき、

(1)  $U = \min\{X, Y\}$  の分布の密度関数をもとめよ。

(2)  $V = |X - Y|$  の分布の密度関数をもとめよ。

*Hint:*  $P(U \leq u) = 1 - P(U > u) = 1 - P(X > u, Y > u)$ . 独立性をもちいる。

**Ex 5.12.**  $X, Y$  をともにパラメータ  $\lambda$  の指数分布に従う独立な確率変数であるとする。そのとき新しい確率変数  $X_{(1)}, X_{(2)}$  を、 $X, Y$  を小さい順に並べ直したものとす。すなわち  $X_{(1)} = \min\{X, Y\}$ ,  $X_{(2)} = \max\{X, Y\}$  とす。その時、 $X_{(1)}$  および  $X_{(2)} - X_{(1)}$  は、それぞれパラメータ  $2\lambda$  および  $\lambda$  の指数分布に従う独立な確率変数であることを示せ。

**Ex 5.13.** 確率変数  $X, Y$  は独立でともにパラメータ  $\lambda$  の指数分布  $Exp(\lambda)$  にしたがうものとするとき、任意の正数  $t > 0$  にたいして  $P\left\{\frac{Y}{X} \leq t\right\} = \frac{t}{1+t}$  となることを示せ。

**Ex 5.14.**  $X, Y$  が独立かつともに標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う時、 $X^2 + Y^2$  はパラメーター  $\frac{1}{2}$  の指数分布  $Exp(\frac{1}{2})$  に従うことを示せ。

**Th.5.15.**  $X$  と  $Y$  は独立な確率変数とする。そのとき、 $X + Y$  の密度関数  $f_{X+Y}$  は

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

である。特に  $X, Y$  がともに非負値であるとき、

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^z f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

**Ex.5.16.**  $X_1, X_2$  をそれぞれ平均  $m_1, m_2$ , 分散  $v_1, v_2$  の正規分布にしたがう独立な確率変数とすると、 $X_1 + X_2$  は平均  $m_1 + m_2$ , 分散  $v_1 + v_2$  の正規分布にしたがう。すなわち

$$X_1 \sim N(m_1, v_1), X_2 \sim N(m_2, v_2), X \perp Y \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(m_1 + m_2, v_1 + v_2).$$

**Ex.5.17.**  $X, Y$  を標準正規分布  $N(0, 1)$  にしたがう独立な確率変数であるとする。このとき  $2X - Y$  の確率分布を以下の方法で求めよ。

- (1) 任意の  $z \in \mathbb{R}$  に対して  $P(2X - Y \leq z)$  を計算する。
- (2)  $2X - Y$  の特性関数を計算し、一意性定理を用いる。

medskip

**Ex.5.18.** ( $\Gamma$  分布)  $X_1, X_2, \dots$  がパラメーター  $\lambda$  の指数分布に従う独立な確率変数の列とする。  $S_0 = 0$  とし、各  $n$  に対し  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  とするとき、 $S_n$  は次の密度関数  $f_n$  をもつことを帰納法を用いて示せ。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

この密度関数  $f_n$  をもつ確率分布をガンマ分布 ( $\Gamma(n, \lambda)$ ) という。

**Ex.5.19.** (*Poisson Process*) 任意の  $t > 0$  に対して  $N(t) = \sup\{n; S_n \leq t\}$  とおく。  $N(t)$  は *Poisson* 分布にしたがうことを示せ。 ( $N(t)$  は *Poisson* 過程と呼ばれ、ブラウン運動とならび最も重要な確率過程の一つである。)

*Hint:*  $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\} = \{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$ , よって

$P(N(t) = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$ . これは前問より計算できる。部分積分。

**Ex.5.20.** (2次元正規分布) :  $m_1, m_2 \in \mathbf{R}, \sigma_i > 0, i = 1, 2, |\rho| < 1$  として, 密度関数が

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

で与えられる  $\mathbf{R}^2$  上の確率分布を2次元正規分布という。

(1)  $2 \times 2$  行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  によって定義すると,

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det A}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} (A^{-1})_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j) \right\}$$

とあらわされることを示せ。(  $A$  は  $|\rho| < 1$  の時に正値行列であることに注意。 )

- (2) 確率変数ベクトル  $(X_1, X_2)$  が同時分布密度関数として  $\phi(x_1, x_2)$  をもつとき  $X_1$  は正規分布  $N(m_1, \sigma_1^2)$  に従う事を示せ .
- (3)  $X_1$  と  $X_2$  の相関係数  $\rho(X_1, X_2)$  は  $\rho(X_1, X_2) = \rho$  であることを示せ。
- (4)  $\rho = 0$ , すなわち  $X_1$  と  $X_2$  の相関係数 = 0 であるとき  $X_1$  と  $X_2$  は独立であることを示せ。(正規分布特有の著しい性質!)



## 6. 極限定理 (大数の弱法則 (w-LLN) と中心極限定理 (CLT))

**Ex.6.1.** (大数の弱法則)  $X_1, X_2, \dots$  を独立確率変数列で、それぞれ平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  を持つものとする. 各  $n$  に対して  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  とおく. その時

- (1)  $\frac{1}{n}S_n$  は  $\mu$  に  $L^2$  収束する、すなわち  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right|^2\right] = 0$  である事をしめせ.
- (2) チェビシエフの不等式  $P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{E[|X|^2]}{\epsilon^2}, \forall \epsilon > 0$  を証明せよ.
- (3) 大数の弱法則「 $\frac{1}{n}S_n$  は  $\mu$  に確率収束する」すなわち任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| > \epsilon\right) = 0$  を示せ.

**Ex.6.2.** さいころを  $n$  回投げるとき、6 の目が出る回数が  $\frac{1}{6}n - \sqrt{n}$  と  $\frac{1}{6}n + \sqrt{n}$  の間にある確率は  $\frac{31}{36}$  以上である事をチェビシエフの不等式を用いて示せ.

**Ex.6.3.**  $X_1, X_2, \dots$  を  $[0, 1]$  上の一様分布  $U([0, 1])$  に従う独立確率変数列とし、 $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  とする.  $n \rightarrow \infty$  とするとき、

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq 1 - \epsilon) = 0$  を示せ.
- (2)  $U_n = n(1 - Z_n)$  とおく.  $x > 0$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n \leq x) = 1 - e^{-x}$  を示せ.

**Ex.6.4.** (スターリングの公式)  $y = \log x$  のグラフにおける面積の比較により

$$n \log n - n + 1 \leq \log n! \leq n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + 1$$

が成り立つ事を示せ. さらに精密に、以下の等式が成立することを勉強せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}} = 1.$$

**Ex.6.5.** (2項分布のエントロピー関数) 定数  $p \in (0, 1)$  をひとつとり  $q = 1 - p$  とする.  $(0, 1)$  上の関数  $H(x)$  を

$$H(x) = x \log \frac{x}{p} + (1 - x) \log \frac{1 - x}{q}$$

とおく. このとき

- (1)  $(0, 1)$  上  $H(x) \geq 0$  かつ  $H(p) = 0$  をしめせ.
- (2) テイラーの定理を用いて、 $x \rightarrow p$  の時  $H(x) = \frac{1}{2pq}(x - p)^2 + O(|x - p|^3)$  を示せ.

**Ex.6.6.** (ドモアブル-ラプラスの定理)  $X_1, X_2, \dots$  を  $\{0, 1\}$  に値をとる独立同分布の確率変数列とし、 $P(X_n = 1) = p, P(X_n = 0) = 1 - p = q$  とする。  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  とおく。  
 $a < b$  に対して  $A_n(a, b)$  を区間  $[np + a\sqrt{npq}, np + b\sqrt{npq}]$  のなかの整数点の全体とする。任意の  $k \in A_n(a, b)$  に対して、

(1) スターリングの公式を用いて、 $n \rightarrow \infty$  において

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\hat{p}\hat{q}}} \exp\{-nH(\hat{p})\}(1 + o(1)), \quad \hat{p} = \frac{k}{n}, \hat{q} = 1 - \hat{p}$$

である事を示せ。

(2) 前問 Ex.6.5. の結果を用いて、 $n \rightarrow \infty$  において

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right\}(1 + o(1)),$$

である事を示せ。

**Ex.6.7.** 表の出る確率が  $\frac{2}{3}$  のコインを 180000 回投げる。表の出る回数  $S_{180000}$  について、確率  $P(115000 < S_{180000} < 130000)$  をドモアブル-ラプラスの定理を用いて近似するとき、次の式を満たす  $a, b$  を求めよ。

$$P(115000 < S_{180000} < 130000) \asymp \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$