1. 測度論・積分論の復習.

Ex.1.1. $\mathbf{R}$ における集合族 $\mathcal{F}$ を有限個の区間の和集合の全体、すなわち

$$\mathcal{F}=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i],\quad n=1,2,\cdots,\quad \infty\leq a_1<b_1<a_2<\cdots<a_n<b_n\leq\infty\right\}$$

は有限加法族であるが σ-加法族ではないことをしめせ. $\mathcal{F}$ が生成する σ-加法族を $\mathbf{R}$ 上の *Borel* $\sigma-$ *加法族* と言い、$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ と書く. すべての開区間は $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ に含まれる事をしめせ.

Ex.1.2. *(測度の単調連続性)([S] 命題 1.11)* $(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とする. 次をしめせ.
(1) $B_n\in\mathcal{B}$ が単調増大列であるとき $\mu(\lim_{n\to\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$.
(2) $B_n\in\mathcal{B}$ が単調減少列かつ $\mu(B_1)<\infty$ であるとき $\mu(\lim_{n\to\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$.

Ex.1.3. 任意の $\mathbf{R}$ 上の $\mu(\mathbf{R})=1$ である測度に対して $F(x)=\mu((-\infty,x])$ とおくと, 明らかに任意の $a<b$ に対して $\mu((a,b])=F(b)-F(a)$ である. 測度の単調連続性を用いて以下をしめせ.
(1) $F(x)$ は右連続な単調非減少関数である.
(2) $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$.
(3) $\mu(\{x\})=F(x)-F(x-)$, ただし $F(x-)=\lim_{y\uparrow x}F(y)$ とする. *(*よって, $\mu(\{x\})>0$ であるのは点 x が F の不連続点である時に限る. *)*

Ex.1.4. $(X,\mathcal{B})$ 上の測度 μ が $\mu(X)=1$ を満たし、$B_1,B_2\cdots\in\mathcal{F}$ がすべて $\mu(B_k)=1$ をみたすならば $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\right)=1$ である事を示せ.

ヒント：*de Morgan* の公式および測度の劣加法性 $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)$ を用いる.

Ex.1.5. $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上のボレル $\sigma-$ 加法族、m を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度とする.
(0) 任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して $\{x\}\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$ をしめせ.
(1) $m(\{x\})=0,\quad\forall x\in\mathbf{R}^d$ をしめせ. この事から、任意の可算集合 *(*例えば有理数の全体*)*A に対して $m(A)=0$ をしめせ.
Hint: $\{x\}=[x,x]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(x-\frac{1}{n},x]$ である.「測度の単調連続性」を用いよ.
(2) $m((-\infty,x])=\infty\quad\forall x\in R$ をしめせ.
Hint: $A_n=(-n,x]$ を考える. 再び「測度の単調連続性」.

Ex.1.6. 関数の可測性について, 以下の問いに答えよ.
(1) 測度空間 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 上の実数値関数 f が $\mathcal{B}$-可測関数である事の定義を述べよ.

(2) 可測関数の列 $f_n, n = 1, 2, \cdots$ に対して，関数列の上限関数，下限関数 $\sup_{n\geq 1} f_n$, $\inf_{n\geq 1} f_n$

$$\left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(x) \equiv \sup_{n\geq 1} f_n(x) \qquad \left(\inf_{n\geq 1} f_n\right)(x) \equiv \inf_{n\geq 1} (f_n(x))$$

は $\mathcal{B}$-可測関数である事を証明せよ.

(3) *(2)* において各点での極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が定まっている時，f も $\mathcal{B}$-可測関数である事を証明せよ.

Ex.1.7. $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数は $\mathcal{B}(\mathbf{R})$-可測関数であることを示せ．ただし，$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ は，ボレル σ-集合族である.
Hint: f が連続関数である $\iff$ 任意の開集合 A に対して $f^{-1}(A)$ が開集合である.

Tip.1.8. ここでは、f を測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数とする.

Ex.1.9. 積分の可積分性について以下の問いに答えよ.

(1) 測度空間上の非負値可測関数が可積分である事の定義を述べよ.

(2) 一般の可測関数 f に対して、正値可測関数 $|f|$ が可積分関数ならば、f は可積分関数であるという．f が可積分関数である事と，正値部分 $f_+(x) = max(f(x), 0)$ および負値部分 $f_-(x) = max(-f(x), 0)$ がともに非負値可積分関数であることは同値である事を示せ．その場合に

$$\int_X f(x)\mu(dx) \equiv \int_X f_+(x)\mu(dx) - \int_X f_-(x)\mu(dx)$$

と定義する．$\left|\int_X f(x)\mu(dx)\right| \leq \int_X |f(x)|\mu(dx)$ をしめせ.

Ex.1.10. マルコフ *(*チェビシェフ*)* の不等式を用いて

(1) $\int_X |f(x)|\mu(dx) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \quad \mu - a.e.\, x \in X.$ をしめせ.
Hint: $\{x \in X; |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} \{x \in X; |f(x)| > \frac{1}{n}\}$.

(2) $\int_X |f(x)|\mu(dx) < \infty \Rightarrow |f(x)| < \infty \quad \mu - a.e.\, x \in X$ をしめせ.
Hint: $\{x \in X; |f(x)| = \infty\} \subset \{x \in X; |f(x)| > n\}$, $\forall n$ である。

Ex.1.11. 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可積分関数 f にたいして $E_n = \{x \in X; |f(x)| > n\}$ とする.

(1) マルコフ *(*チェビシェフ*)* の不等式を用いて $\mu(\lim_{n\to\infty} E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ をしめせ.

(2) 優収束定理を用いて $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f(x)|\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X |f(x)| 1_{E_n}(x)\mu(dx) = 0$ をしめせ.

2. L^p 空間

Def.2.1. $p \geq 1$ とする．測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の複素数値 p-乗可積分関数の全体を $L^p(X, \mu)$ と書く．状況が明らかな場合には省略して単に L^p と書く．L^p の各元 f に対して f のノルム $\|f\|_p$ を

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right\}^{1/p}$$

とおく．言い換えると,

$$L^p(X, \mu) = \{\ f : X \to \mathbf{C},\ \ \|f\|_p < \infty\ \}.$$

次に述べるノルムの性質により，$L^p(X, \mu)$ は

$$d(f, g) = \|f - g\|_p$$

により距離 d が定まる距離空間である．特に，関数列 $\{f_n\}$ について,

$$f_n \to f \quad in\ L^p \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Ex.2.2. $p = 1$ とする．$\|\cdot\|_1$ はノルムの公理 *([S], P81)* を満たす線形空間である．すなわち，任意の $f, g \in L^1$ に対して以下が成立する．

(1) $\|f\|_1 \geq 0$ である．とくに，$\|f\|_1 = 0 \iff f = 0.$ ただし $f = 0$ とは $f(x) = 0,\ \mu - a.e.x$ の意味である．

(2) 任意の $\alpha \in \mathbf{C}$ に対して $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$.

(3) $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Def.2.3. *(1)* 距離 d が定まる距離空間 E 内の点列 a_n がコーシー列であるとは，次が成り立つ事である：

$$\lim_{m,n\to\infty} d(a_m, a_n) = 0$$

(2) 距離空間 E が完備であるとは，E 内の任意のコーシー列が必ず E 内の一点に収束する事である．

Ex.2.4. $\mathbf{Q}$ を有理数全体の集合とする．$\mathbf{Q}$ には自然な距離 $d(x, y) = |x - y|$ が定まるが，$\mathbf{Q}$ はその距離に関して完備ではない事を示せ．

Tip.2.5. 次の L^1 空間の完備性の証明において，すでに学んだ以下の事実を用いる．

(1) 級数に対する単調収束定理：$\displaystyle\int \sum_n |f_n| d\mu = \sum_n \int |f_n| d\mu.$

(2) 優収束定理.

(3) *Ex.1.10. (2)* の結論：非負値関数 g が可積分ならば $g(x) < \infty,\ \mu - a.e.$

(4) 絶対収束する級数は収束する．

Ex.2.6. *(*L^1 空間の完備性*)* $L^1(X, \mu)$ 内の関数列 $\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が，すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\|f_m - f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}, \quad \textit{for all} \quad m = n+1, n+2, \cdots$$

をみたすとする．$f_n(x) = f_1(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(f_{k+1}(x) - f_k(x))$ に注意する．

(1) 前問 *(1)* より，関数項の無限級数

$$g(x) = |f_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

は X 上の可積分関数であることをしめせ．特に、前問 *(3)* より，g はほとんどすべての $x \in X$ において収束する．

(2) 前問 *(4)* より，ほとんどすべての $x \in X$ で $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在することをしめせ．

(3) 優収束定理を用いて

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n \to \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

をしめせ．すべての n に対して $|f_n(x) - f(x)| \leq g(x)$ である事に注意．

(4) $f \in L^2(X, \mu)$，すなわち f は可積分である事を示せ．*Hint:* $|f_n(x)| \leq g(x)$ は明らか．優収束定理を使う．

Def.2.7. $f, g \in L^2$ に対して $(f, g) = \displaystyle\int_X f(x)\overline{g(x)}\mu(dx)$ を f と g の内積という．

Ex.2.8. *(*シュワルツの不等式*)* $f, g \in L^2$ とする．

(1) $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ を示せ．

(2) *(1)* を用いて $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$ を示せ．

(3) *(1)* を用いて $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ を示せ．

Ex.2.9.

(1) ヘルダーの不等式の名前で呼ばれる命題を述べよ．

(2) ミンコフスキーの不等式の名前で呼ばれる命題を述べよ．

Ex.2.10. $\mu(X) < \infty$ とする．$p > 1$ に対して $f \in L^p(X, \mu)$ ならば $f \in L^1(X, \mu)$ である事を示せ．*Hint:* $g(x) = 1$ は任意の $q > 1$ に対して $g \in L^q(X, \mu)$ である．ヘルダーの不等式を使う．

3. Fourier 級数論

以後，$\{\phi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を $L^2(X,\mu)$ の正規直交基底であるとする．すなわち，

$$(\phi_m,\phi_n)=\int_X \phi_m(x)\overline{\phi_n(x)}\mu(dx)=\begin{cases}0, & \text{if } m\neq n,\\ 1, & \text{if } m=n.\end{cases}$$

とする．

Ex.3.1. f が $f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\phi_k$ のとき，$(f,\phi_k)=\alpha_k$, $n=1,2,\cdots,n$ をしめせ.

Ex.3.2. *(リース・フィッシャーの定理)* $\{\phi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を $L^2(\mu)$ の正規直交基底であるとする．$\sum_{k=1}^{\infty}|\,\alpha_k\,|^2<\infty$ であるような任意の複素数列 $\{\alpha_k\}_k$ に対して L^2 内の列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\phi_k\right\}_{n=1,2,\cdots}$ はコーシー列である事をしめせ．これより，L^2 の完備性より，L^2 内に $\tilde f=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\,\phi_k$ が存在する．前問 *(*の拡張*)* より $(\tilde f,\phi_n)=\alpha_n$ である．

Ex.3.3. $\{\phi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を $L^2(\mu)$ の正規直交基底であるとする．
(1) 任意の $f\in L^2$ に対して次が成立する．

$$\inf_{(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)}\|f-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\phi_k\|^2=\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)\phi_k\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)^2.$$

最小値は $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\,(f,\phi_1),\cdots,(f,\phi_2)\,)$ においてとる．

(2) (Bessel の不等式) 任意の $f\in L^2$ に対して $\|f\|^2\leq\sum_{k=1}^{\infty}(f,\phi_k)^2$ を示せ.

Def.3.4. 任意の $f\in L^2$ に対して $\|f\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(f,\phi_k)^2$ である時，正規直交基底 $\{\phi_n\}$ は完全な 正規直交基底であるという．

Th.3.5. $\{\phi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が完全な正規直交基底である時，任意の $f\in L^2$ に対して

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n(x)\ \mathit{in}\ L^2,\quad \text{すなわち}\quad \lim_{n\to\infty}\|f-\sum_{k=1}^{n}(f,\phi_k)\phi_k\|^2=0$$

である．これを，f の Fourier 級数展開 という．

Prop.3.6. $L^2((-\pi,\pi),dx)$ において
(1) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},n=\cdots,-2,-1,0,1,\cdots\right\}$ は完全正規直交系をなす．

(2) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \cdots,\right\}$ は完全正規直交系をなす.

これらの関数系によるフーリエ級数展開を三角級数展開とも言う．三角級数展開は

(#) $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \ \text{ in } L^2,\ \text{ただし、}\ a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy$$

と表す事ができる.

Ex.3.7. 以下の $L^2((-\pi,\pi),dx)$ における *Fourier* 級数展開を確認せよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x \in (-\pi, 0) \\ 1 & \text{if } x \in [0,\pi) \end{cases}$ とする.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x + \cdots\right).$$

(2) $x = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \cdots).$

(3) $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)} + \cdots\right).$

Ex.3.8. $[0,\infty)\times[-\pi,\pi]$ 上の熱伝導方程式

$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \qquad u(t,-\pi) = u(t,\pi)$(境界条件), $\quad u(0,x) = u_0(x)$(初期条件)

の解 $u(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty)\times[-\pi,\pi])$ を，u を x についてフーリエ級数展開する事により求める方法を，以下の手順に従い説明せよ.

(1) $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)e^{inx}$ とおき，方程式に代入して各 $c_n(t)$ が満たすべき微分方程式を求め，それを解く事により $u(t,x)$ は次の表示を持つ：

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2}{2}t}e^{inx}, \qquad \text{ただし} \quad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)e^{-inx}dx$$

(2) $p(t,x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{2}t}e^{inx}$ おくと，$u(t,x) = \int_{-\pi}^{\pi} p(t,x-y)u_0(y)dy$ である.

(3) $g_t(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-2\pi j)^2}{2t}\right)$ とおく．$g_t(x)$ のフーリエ級数展開を考える事により，$g_t(x) = \sqrt{2\pi t}p(t,x)$ である.

(4) 結局，$p(t,x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-2\pi j)^2}{2t}}$ である.