1. 数列と級数の収束と発散，難波誠「微分積分学」より．

Def.1.1. 有界な集合.

1. $A \subset \mathbf{R}$ が上に有界. $\iff$ $\exists M < \infty$ *such that* $A \subset (-\infty, M]$.

2. $A \subset \mathbf{R}$ が下に有界. $\iff$

3. $A \subset \mathbf{R}$ が有界. $\iff$ A は上にも下にも有界.

Def.1.2. 上限と下限.

$$a = \sup A \iff \begin{cases} (1)\ \forall x \in A, x \le a. \\ (2) \forall \epsilon > 0, \exists x \in A \quad \textit{such that} \quad a - \epsilon \le x. \end{cases}$$

$$a = \inf A \iff \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$$

Th.1.3. *(実数の連続性の公理)* $\mathbf{R}$ の上に有界な任意の部分集合 $A \neq \phi$ に対して、A の上限 $\sup A$ が $\mathbf{R}$ のなかに存在する.

Tip.1.4.

(1) 連続性の公理より、任意の有界な集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して $\sup A \in (-\infty, \infty)$ および $\inf A \in (-\infty, \infty)$ が存在する.

(2) A が上に有界でないとき、$\sup A = \infty$ と書き、A が下に有界でないとき、$\inf A = -\infty$ と書く.

Def.1.5. *(1)* 実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots,}$ がある実数 a に収束する ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$).

$$\iff \qquad (\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n \ge N) \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

(2) 数列が発散する $\iff$ 数列が収束しない.

Ex.1.6. 上に有界な単調非減少数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$. 下に有界な単調非増大数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ は収束し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$.

Tip.1.7. 実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ の発散には次の *3* 通りがある.

(1) $+\infty$ に発散する*:* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \iff \quad (\forall M > 0)(\exists N)(\forall n \ge N)\ a_n > M$.

(2) $-\infty$ に発散する：$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \iff$

(3) 収束しないが $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ でも $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ でもない.（このような数列の例を、有界な場合と有界ではない場合について構成せよ.）

Ex.1.8. 次をしめせ.
(1) $\{a_n\}$ の極限は存在するとすればただ一つである.
(2) $\{a_n\}$ が収束するならば $\{a_n\}$ は有界である.

Ex.1.9. 任意の $n \geq 1$ に対して $a_n \leq b_n$ であり，かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば $a \leq b$ である.

Ex.1.10. 次をしめせ.
(1) $0 \leq a < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ である.
(2) $a > 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ である.

Ex.1.11. *(指数オーダーと冪オーダー)* $a > 1, k > 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \infty$. ヒント：*2* 項定理.

Ex.1.12. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$

Th.1.13. *(実数列が収束するための Cauchy の判定条件, [Na] 定理 1.10)*

$$\{a_n\} \text{ が収束する.} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \textit{ such that } \quad \forall n, m \geq N, \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Def.1.14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$

Ex.1.15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Ex.1.16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 収束することを級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は絶対収束するといい，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ と書く.
「$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する.」を示せ.

Ex.1.17. 次をしめせ.
(1) 級数 $1 + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \cdots$ は $s > 1$ のとき収束し，$s \leq 1$ のとき発散する.
(2) $\{b_n\}$ は正の単調現象列で $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ のとき，交項級数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ は収束する.
(3) *(1),(2)* より，級数 $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$ は発散するが $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots$ は収束する.

2. 積分と極限の順序交換はいつでも可能なのか？ 収束定理

Ex.2.1. 以下の，それぞれ指定された領域 A 上で定義された関数列 $\{f_n\}$ に対して，その各点収束極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

$$f_n(x) = \quad (1)\ \frac{nx}{n^2x^2+1}\ on\ [0,\infty) \quad (2)\ \frac{nx}{nx+1}\ on\ [0,\infty) \quad (3)\ nx(1-x)^n\ on\ [0,1]$$
$$(4)\ nxe^{-nx^2}\ on\ [0,\infty) \quad (5)\ nxe^{-nx}\ on\ [0,\infty) \quad (6)\ \frac{e^{-x+\frac{x}{n}}}{e^{\frac{x}{n}}+1} > on\ [0,\infty)$$

Ex.2.2. 前問において積分と極限の操作の順序交換が可能か否か確かめよ．すなわち，$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx$ は成立するか.

Ex.2.3. 以下の等式が成立するか、両辺を具体的に計算することにより確かめよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (x^{n-1}-2x^{2n-1})dx = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-2x^{2n-1})\right)dx.$

(2) $\displaystyle\lim_{s\searrow 0}\int_0^{\infty} e^{-sx}\sin x dx = \int_0^{\infty}\left(\lim_{s\searrow 0} e^{-sx}\sin x\right)dx.$

Prop.2.4. *(*関数項級数に対する単調収束定理*)*

$$g_n \geq 0\ on\ E \Rightarrow \int_E \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)dx$$

Ex.2.5. *Prop.2.4.* を用いて次を正当化せよ.

$$\int_0^{\infty}\frac{x}{1-e^{-x}}dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} xe^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Ex.2.6. *Prop.2.4.* を用いて $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^k}dx = \frac{4}{3}$ が成立することをしめせ.

Ex.2.7. $[0,1]$ 上関数列 $f_n(x) = nxe^{-nx}$ を考える.

(1) この関数列の各点での極限 $f(x)$ をもとめよ．f_n は f に一様収束するか.

(2) 具体的に計算する事により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ がなりたつことをしめせ.

(3) ルベーグ収束定理を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ がなりたつことをしめせ.

Ex.2.8. *(1)* 区間 $[0,1]$ において関数列 $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+1}$ は各点収束するか．するならば極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ をもとめよ．
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ をもとめよ．

Ex.2.9. ルベーグの優収束定理を用いて次の極限を計算せよ．

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nx^3}dx \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-x+\frac{x}{n}}}{e^{\frac{x}{n}}+1}dx \qquad (3)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\sin^n x dx.$$

Ex.2.10. 優収束定理を用いて次の極限を計算せよ．

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}dx \quad (2)\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\sin(\frac{x}{n})\frac{1}{x(1+x^2)}dx.$$

Ex.2.11. $\mathbf{R}$ 上有界かつ連続な関数 f に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{x^2}{t}} f(x)dx = f(0)$$

が成立することをしめせ．ただし $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} = 1$ を既知としてよい． *Hint:* 変数変換 $x = \sqrt{t}u$ をおこなえ．

Ex.2.12. f は $\mathbf{R}$ 上有界かつ連続とする．そのときルベーグ収束定理を応用して次をしめせ．

$$\lim_{a\to 0}\frac{a}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{f(x)}{x^2+a^2}dx = f(0).$$

ただし、$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{x^2+1}dx = 1$ を既知としてよい． *Hint:* 変数変換 $x = au$.

Prop.2.13. *(*関数項級数に対する優収束定理*)*

$$\sum_{n=1}^\infty\int_E |g_n(x)|dx < \infty \Rightarrow \int_E\sum_{n=1}^\infty g_n(x)dx = \sum_{n=1}^\infty\int_E g_n(x)dx$$

Ex.2.14. 前 **Prop** を用いて，$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ より，各 $a>0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos ax dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}e^{-a^2/2}$$

をしめせ．ただし，$\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2/2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(2n-1)!!,\ n = 1,2,\cdots$ を既知としてよい．

Prop.2.15. *(Fubini-Tonelli の定理)*
(1) 2 変数の関数 $f(x,y)$ に対してすべての (x,y) に対して $f(x,y)\geq 0$ ならば

$$\int dx\int dy f(x,y)=\int dy\int dx f(x,y)=\int f(x,y)dxdy.$$

(2) $f(x,y)$ が正負両方の値をとる場合，$\displaystyle\int dx\int |f(x,y)|dy<\infty$ または $\displaystyle\int dy\int |f(x,y)|dx<\infty$ のいずれかがなりたつとき，*(1)* と同じ結論がなりたつ．

Ex.2.16. 関数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ に対して

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy,\quad \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$$

を計算し、2 つの積分が一致しないことを示せ．また $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]}|f(x,y)|dxdy$ は発散することをしめせ．

Ex.2.17. $0<a<b$ とし $D=\{(x,y);0\leq x\leq 1,a\leq y\leq b\}$ とする．積分 $\displaystyle\int_D x^y dxdy$ にフビニの定理を適用して次をしめせ：

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\log x}dx=\log\frac{1+b}{1+a}.$$

Prop.2.18. *(積分と微分の順序交換)* $f(t,x)$ が $(a,b)\times I$ 上の関数に対して，I 上のある可積分関数 $g(x)$ が存在して

$$|\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)|\leq g(x)\quad \forall(a,b)\times I$$

ならば

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_I f(t,x)dx=\int_I\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)dx.$$

Ex.2.19. 微分積分順序交換定理をもちいてつぎをしめせ．
(1) $I(a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2/2}\cos ax dx$ とおく．$I'(a)$ を計算せよ．
(2) $I(a)$ をもとめよ．
(3) 各 $n=1,2,\cdots$ に対して $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2/2}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(2n-1)!!$ をしめせ．

Ex.2.20. $\displaystyle\int_0^1 e^{ax}dx = \frac{e^a - 1}{a}$ に対して微分積分順序交換定理をもちいて $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ を求めよ.

ヒント：交換定理を用いた後 $a = 1$ を代入するので，定理における優関数は例えば $(1/2, 3/2) \times [0, 1]$ 上でとることができればよい.

以下，収束定理の応用問題

Ex.2.21. *(1)* 部分積分公式を用いて, すべての非負整数 n に対し $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ を求めよ.

(2) 関数項級数に対する優収束定理を用いて，$\displaystyle\sin x = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$ より

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{1+a^2}, \quad a \in (-\infty, \infty)$$

をしめせ.

(3) *(2)* で得られた式に対して微分積分順序交換定理をもちいて $\displaystyle\int_0^\infty x \sin x e^{-x} dx$ を求めよ.

Ex.2.22. *(1)* 任意の $A > 0$ に対し，$\displaystyle\int_0^A dx \int_0^\infty dt |e^{-xt} \sin x| < \infty$ をしめせ.

ヒント：$|\sin x| \leq |x|$.

(2) *Fubini* の定理をもちいて，任意の $A > 0$ に対し

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \cos A \int_0^A \frac{e^{-At}}{1+t^2} dt - \sin A \int_0^A \frac{te^{-At}}{1+t^2} dt$$

をしめせ.

ヒント：$x > 0$ に対して $\displaystyle\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt$ である．次の式を既知としてよい：
$\displaystyle\int_0^A e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{1+t^2}(1 - \cos A \cdot e^{-At} - \sin A \cdot te^{-At})$.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ を示せ．ヒント：優収束定理を用いる.

3. 測度空間、ルベーグ測度

Prop.3.1. 実数の全体を $\mathbf{R}$ または $(-\infty, \infty)$ と書く．有理数の全体を $\mathbf{Q}$ と書く．

(1) $\mathbf{R}$ は非可算集合であることをしめせ．*(*対角線論法*)*

(2) $\mathbf{Q}$ は可算集合であること *(*$\mathbf{Q}$ のすべての元を $\{a_1, a_2, \cdots\}$ と自然数の番号をつけてならべつくすことができる事*)* をしめせ.

(3) $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{R}$ 内稠密 *(dense)* である、すなわち $\forall x \in \mathbf{R}, \forall \epsilon > 0, \exists a \in \mathbf{Q}$ *such that* $|x - a| < \epsilon$ であることをしめせ.

Ex.3.2. *([S]* 例題 *1.2) Dirichlet* の関数 f を $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{if } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \textit{if } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ とする． そのとき $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_{n,m}(x) = f(x)$ をしめせ.

(2) Dirichlet の関数はリーマン可積分でないことをしめせ.

Ex.3.3. *(field* が生成する σ*-field, [S]P17)* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ とする．部分集合族 $\mathcal{F}_1 = \{\{1\}\}$ および $\mathcal{F}_2 = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ によって生成される σ-field $\sigma(\mathcal{F}_i)$ $i = 1, 2$ を求めよ.

Fact.3.4. *(*ボレル集合体、*[S]* 命題 *1.7)* $\mathbf{R}$ における集合族 $\mathcal{F}$ を有限個の区間の和集合の全体、すなわち

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i], \quad n = 1, 2, \cdots, \quad \infty \le a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n \le \infty \right\}$$

が生成する σ-加法族を $\mathbf{R}$ 上の <u>*Borel* $\sigma-$ 加法族 *(*ボレル集合体*)*</u> と言い、$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ と書く．$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ は，すべての開区間が生成する $\sigma-$ 加法族と一致する.

Def.3.5. *(*測度*)* X をある集合とする．$\mathcal{B}$ をその上の σ-加法族であるとする．m が $(X, \mathcal{B})$ 上の *(*可算加法的*)* 測度であるとは、

(1) m は $(X, \mathcal{B})$ 上の有限加法的測度である.

(2) さらに、$A_k \in \mathcal{F}, k = 1, 2, \cdots$ がたがいに交わらないとき

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k). \qquad (\sigma\text{-加法性})$$

Ex.3.6. *(*測度の単調連続性*)([S]* 命題 *1.11 (m.7)(m.8))* $(X, \mathcal{B}, m)$ を測度空間とする.

(1) $B_n \in \mathcal{B}$ かつ $B_n \nearrow$ であるとき $m(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$.

(2) $B_n \in \mathcal{B}$ かつ $B_n \searrow$ かつ $m(B_1) < \infty$ であるとき $m(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$.

Prop.3.7. *(*測度の劣加法性、*[S]* 命題 *1.11)* m が $(X, \mathcal{B})$ 上の測度とするとき，任意の $B_k \in \mathcal{B}$, $k = 1, \cdots,$ に対して $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ である.

Ex.3.8. $(X,\mathcal{B})$ 上の測度 m が $m(X)=1$ を満たし、$B_1, B_2\cdots \in \mathcal{F}$ がすべて $m(B_k)=1$ をみたすならば

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)=1.$$

ヒント：*de Morgan* の公式および B_k^c について測度の劣加法性を用いる.

Th.3.9. *(ルベーグ測度 [S] P21)* $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の測度で、任意の区間 $(a,b]$ に対して

$$m((a,b])=b-a$$

であるものが存在する．このような m を *1* 次元ルベーグ測度という.

Ex.3.10. $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上のボレル $\sigma-$ 加法族、m を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度とする.

(0) 任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して $\{x\}\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$ をしめせ.

(1) $m(\{x\})=0,\quad \forall x\in\mathbf{R}^d$ をしめせ．この事から、任意の可算集合 *(*例えば有理数の全体*)*A に対して $m(A)=0$ をしめせ.

Hint: $\{x\}=[x,x]=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(x-\frac{1}{n},x]$ である.「測度の単調連続性」を用いよ.

(2) $m((-\infty,x])=\infty\quad \forall x\in R$ をしめせ.

Hint: $A_n=(-n,x]$ を考える．再び「測度の単調連続性」.

Th.3.11. *(ルベーグ・スティルチェス測度 [S] P230)* 任意の右連続かつ単調非減少関数 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ に対して

$$m((a,b])=F(b)-F(a),\qquad -\infty<\forall a<\forall b<\infty$$

をみたす $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の測度が一意的に存在する．*(*$F(x)=x$ のとき，ルベーグ測度である．*)*

Ex.3.12. z をある実数とし，

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{if } x<z,\\ 1, & \textit{if } x\geq z\end{cases}$$

とする．この F に対して $m((a,b])=F(b)-F(a)$，$-\infty<\forall a<\forall b<\infty$ が，$(-\infty,\infty)$ 上の測度を定めることをたしかめよ．この m を「z にマスをもつデルタ測度」といい，δ_z と書く.

3. 可測関数と積分の定義

可測関数

Tip.3.1. ここでは、測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数のことを、単に可測関数と書く事とする.

Ex.3.2. $y \le a$ であることと、すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して $y < a + \frac{1}{n}$ であることは同値であることを確認せよ．それを用いて次をしめせ：
f が可測関数である．すなわち、すべての $y \in \mathbf{R}$ に対して $\{x \in X;\ f(x) < y\} \in \mathcal{B}$
$\Longleftrightarrow$ すべての $y \in \mathbf{R}$ に対して $\{x \in X;\ f(x) \le y\} \in \mathcal{B}$
$\Longleftrightarrow$ すべての $y \in \mathbf{R}$ に対して $\{x \in X;\ f(x) > y\} \in \mathcal{B}$
$\Longleftrightarrow$ すべての $y \in \mathbf{R}$ に対して $\{x \in X;\ f(x) \ge y\} \in \mathcal{B}$

Ex.3.3. 可測関数の列 $f_n, n = 1, 2, \cdots$ が与えられているものとする.

(1) $\sup_{n\ge1} f_n,\ \inf_{n\ge1} f_n$ を、各 $x \in E$ ごとに

$$\left(\sup_{n\ge1} f_n\right)(x) \equiv \sup_{n\ge1} f_n(x) = \sup\{f_n(x), n = 1, 2, \cdots\}$$
$$\left(\inf_{n\ge1} f_n\right)(x) \equiv \inf_{n\ge1} (f_n(x)) = \inf\{f_n(x), n = 1, 2, \cdots\}$$

とおくことにより定義する．関数 $\sup_{n\ge1} f_n$ が可測関数であることをしめせ.

Hint: たとえば、$\max\{a, b\} \le y \iff a \le y$ かつ $b \le y$ であることに注意.

(2) $\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right), \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)$ は共に可測関数である．ただし

$$\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \limsup_{n\to\infty} (f_n(x)), \qquad \text{ただし} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\ge1}\left(\sup_{m\ge n} a_m\right).$$

(3) 各 $x \in X$ に対して $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき、f は可測関数である.

Ex.3.4. 集合 $A \subset X$ に対し、その定義関数 (指示関数、*indicator function*)$1_A(x)$ とは

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{if } x \in A \\ 0, & \textit{if } x \notin A \end{cases}$$

である．$A \in \mathcal{B}$ のとき 1_A は可測関数である.

Tip.3.5. $1_A(x) \cdot 1_B(x) = 1_{A\cap B}(x)$.

Ex.3.6. 測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$ 上連続関数は可測関数であることを示せ.

Ex.3.7. 可測関数 f に対して $f_+(x) = max\{f(x), 0\}, f_-(x) = max\{-f(x), 0\}$ とおく.

(1) f_+, f_- は可測関数であることをしめせ.

(2) $f(x) = f_+(x) - f_-(x),\ |f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ であることを確かめよ.

積分の定義、[S] P37

Tip.3.8. ここでは、f を測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数とする．

Ex.3.9. $k = 1, \cdots, n$ に対して $a_k > 0, A_k \in \mathcal{B}$ とする．非負単関数 $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}(x)$, に対して積分 $\int_X f(x)\mu(dx)$ を

$$\int_X f(x)\mu(dx) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

により定義する．このクラスにおける積分の線形性：

$$\int_X (af(x) + bg(x))\mu(dx) = a\int_X f(x)\mu(dx) + b\int_X g(x)\mu(dx)$$

および単調性：$f(x) \geq g(x)$ $(x \in X)$ ならば

$$\int_X f(x)\mu(dx) \geq \int_X g(x)\mu(dx)$$

をしめせ.

Ex.3.10. 非負可測関数 f に対して、ある非負単関数の列 $\{\phi_n\}$ で $\forall x \in E$ に対し $\phi_n(x) \nearrow f(x)$ であるものがとれるので、

$$\int_X f(x)\mu(dx) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\mu(dx)$$

とする．右辺の極限が収束するとき、f は <u>可積分関数</u> であるという．右辺の極限は $\{\phi_n\}$ のとりかたによらないことをしめせ．また、このクラスにおける積分の線形性と単調性をしめせ.

Ex.3.11. 一般の可測関数 f に対して、正値可測関数 $|f|$ が *Ex.3.10.* の意味で可積分関数ならば、正値可測関数 f_+ および f_- はともに可積分関数

$$\int_X f(x)\mu(dx) \equiv \int_X f_+(x)\mu(dx) - \int_X f_-(x)\mu(dx)$$

とする.

$$\left|\int_X f(x)\mu(dx)\right| \leq \int_X |f(x)|\mu(dx)$$

をしめせ．また、このクラスにおける積分の線形性と単調性をしめせ.

Def.3.12. $E \subset X$, $E \in \mathcal{B}$ に対して $1_E(x)f(x)$ が可積分ならば

$$\int_E f(x)\mu(dx) \equiv \int_X 1_E(x)f(x)\mu(dx).$$

Ex.3.13. $\mu(A) = 0$ ならば、A 上の任意の可測関数 f に対し $\displaystyle\int_A f(x)\mu(dx) = 0$ である事を、積分の定義にしたがってしめせ.

Hint: f が単関数、次に非負可測関数、最後に実数値可測関数である場合にしめせ.

Ex.3.14. *(Dirichlet 関数)* $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上のボレル σ-加法族、μ を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度とする．$[0,1]$ 上の関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{if } x \text{ は有理数} \\ 0 & \textit{if } x \text{ は無理数} \end{cases}$$

とする.

(1) f は測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$ 上の可測関数であることをしめせ.

(2) ルベーグ式の積分の定義にしたがって $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\mu(dx)$ を求めよ.

Def.3.15. 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の各点 x ごとに考えることができる命題が、ある $\mu(E) = 0$ である集合 $E \in \mathcal{B}$ の点をのぞくすべての点 x について成立するとき、その命題は <u>ほとんどいたるところ *(μ-a.e. $x \in X$)*</u> で成立するという.

Ex.3.16. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は $[0, \infty)$ 上ルベーグ測度に関して可積分でないことをしめせ.

Ex.3.17. チェビシェフの不等式を用いて

(1) $\displaystyle\int_X |f(x)|\mu(dx) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \mu - a.e.\, x \in X.$ をしめせ.

Hint: $\displaystyle\{x \in X; |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in X; |f(x)| > \frac{1}{n}\}.$

(2) $\displaystyle\int_X |f(x)|\mu(dx) < \infty \Rightarrow |f(x)| < \infty \quad \mu - a.e.\, x \in X$ をしめせ.

Hint: $\{x \in X; |f(x)| = \infty\} \subset \{x \in X; |f(x)| > n\}$, $\forall n$ である.

Ex.3.18. *(Riemann-Lebesgue の Lemma.1)* $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}$ 上のボレル $\sigma-$ 加法族、m を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度とする．f を測度空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), m)$ 上の可積分関数とする．このとき、$\displaystyle\lim_{|t| \to \infty} \int_{\mathbf{R}} f(x)\sin(tx)dx = 0$ であることを、積分の定義にしたがって順をおってしめせ.

(1) $f(x) = 1_{[a,b]}(x)$ の場合.

(2) f が一般の非負可積分な単関数の場合.

(3) f が一般の非負可積分関数の場合.