1. 大偏差原理，Cramer の定理

Ex.1.1. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数列 $\{X_k, k=1,2,\cdots\}$ に対して $\hat{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ とする．

(1) $\hat{S}_n$ は $N(0,\frac{1}{n})$ に従う事を確認し，それより次をしめせ：

$$P\left(\hat{S}_n \geq y\right) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{n}{2}y^2}dy \leq \sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-\frac{n}{2}x^2}\int_x^\infty e^{-\frac{n}{2}(y-x)^2}dy = \frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}x^2}.$$

(2) 任意の $c>0$ に対して次をしめせ：

$$P\left(\hat{S}_n \geq y\right) \geq \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_x^{x+\frac{c}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{n}{2}y^2}dy \geq \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^c e^{-\frac{y^2}{2}}dy \cdot e^{-\sqrt{n}x^2}e^{-\frac{n}{2}x^2}.$$

(3) *(1), (2)* より、任意の $y>0$ に対して次をしめせ：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P\left(\hat{S}_n \geq y\right) = -\frac{y^2}{2}.$$

Ex.1.2. $\mathbf{R}$ 上の確率測度 μ の <u>キュムラント母関数</u> ψ を $\psi(s) = \log\int_{\mathbf{R}} e^{sx}\mu(dx)$, $s\in\mathbf{R}$ により定める．μ が *Ber(p), N(0,v)* および *Exp(λ)* のとき，ψ はそれぞれ以下になることをしめせ.

確率分布	ψ	ψ の定義域
$Ber(p)$	$\log(pe^s+q)$	$\mathbf{R}$
$N(0,v)$	$\frac{1}{2}vs^2$	$\mathbf{R}$
$Exp(\lambda)$	$\log\lambda - \log(\lambda - s)$	$(-\infty,\lambda)$

Ex.1.3. 任意の実数 s に対して確率測度 μ の <u>Cramer 変換</u> μ_s を

$$\mu_s(dx) = e^{sx-\psi(s)}\mu(dx),\quad \text{ただし } \psi \text{ は } \mu \text{ のキュムラント母関数}$$

と定義する．μ_s は確率測度であること，すなわち $\int_{\mathbf{R}} 1\mu_s(dx) = 1$ をしめせ．μ が *Ber(p), N(0,v)* および *Exp(λ)* のとき，μ_s は以下になることをしめせ.

確率分布	μ_s
$Ber(p)$	$Ber\left(\frac{e^sp}{q+e^sp}\right)$
$N(0,v)$	$N(s,v)$
$Exp(\lambda)$	$Exp(\lambda - s)\quad(\forall s<\lambda)$

Ex.1.4. $\mathbf{R}$ 上の確率測度 μ のキュムラント母関数 ψ と *Cramer* 変換 μ_s の間の次の関係をを示せ：

$$\psi'(s) = \int x\mu_s(dx), \quad \psi''(s) = \int x^2\mu_s(dx) - \left(\int x\mu_s(dx)\right)^2$$

すなわち確率分布 μ_s に従う Y に対して $\psi'(s) = E[Y], \quad \psi''(s) = \mathrm{Var}[Y]$ である．特に，$\psi''(s) > 0$ である．

Ex.1.5. 前問より，$s \to \psi'(s)$ は単調増大である．よってその逆関数 $x \to s(x)$ が存在する．逆関数の定義より $\psi'(s(x)) = x$, よって前問より $\mu_{s(x)}$ に従う Y に対して $E[Y] = x$ である．μ が *Ber(p), N(0,v)* および *Exp(λ)* のとき，$s(x)$ を計算せよ．

Ex.1.6. $\{X_k, k = 1, 2, \cdots\}$ は独立確率変数列で，それぞれ分布 μ に従うとする．$E[X_k] = m$ が存在し，さらに μ のキュムラント母関数 ψ が *0* の近傍で定義されているとする．次をしめせ．

(1) $x > m$ である任意の x に対して $A_x = \{(x_1, \cdots, x_n); \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} > x\}$ とすると

$$\begin{aligned}
P(\hat{S}_n > x) &= \int_{A_x} 1\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n) \\
&= \int_{A_x} \exp(-s\sum_{k=1}^{n} x_k + n\psi(s))\mu_s(dx_1)\cdots\mu_s(dx_n) \\
&\leq \exp(-n\{sx - \psi(s)\}) \int_{A_x} \mu_s(dx_1)\cdots\mu_s(dx_n).
\end{aligned}$$

(2) $s = s(x)$ とすると，中心極限定理より $\displaystyle\int_{A_x} \mu_s(dx_1)\cdots\mu_s(dx_n) \to \frac{1}{2}$ をしめせ．
Hint: $s = s(x)$ の時，分布 μ_s に従う確率変数の平均は x である．

Ex.1.7. 前問の続き．$c > 0$ に対して $A_{x,c} = \{(x_1, \cdots, x_n); x < \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} < x + \frac{c}{\sqrt{n}}\}$ とする．

(1) 次を確認せよ：

$$\begin{aligned}
P(\hat{S}_n > x) &\geq \int_{A_{x,c}} 1\mu(dx_1)\cdots\mu(dx_n) \\
&\geq \exp(-n\{sx + \frac{c}{\sqrt{n}} - \psi(s)\}) \int_{A_{x,c}} \mu_s(dx_1)\cdots\mu_s(dx_n).
\end{aligned}$$

(2) $s = s(x)$ とすると，中心極限定理より任意の $b > 0$ に対して
$\displaystyle\int_{A_{x,c}} \mu_s(dx_1)\cdots\mu_s(dx_n) \to \int_0^c N(0, v)$, ただし，$v = \psi''(s)$ をしめせ．

Ex.1.8. 前問の続き．$x \to s(x)$ の定義域上 $I(x) = x \cdot x(s) - \psi(s(x))$ とする．

(1) $I'(x) = s(x)$, $I''(x) = \psi''(s(x))^{-1}$ をしめせ．また $I(m) = I'(m) = 0$ をしめせ．これより，すべての x に対して $I(x) \geq 0$ かつ $I(x) = 0 \iff x = m$ をしめせ.

(2) *Ex.1.6.* および *Ex.1.6.* より任意の $x > m$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\hat{S}_n \geq x) = -I(x)$$

をしめせ．$x < m$ の場合にも同様の結論が示される.

Ex.1.9. 前問の続き．I は

$$I(x) = sup_s(s \cdot x - \psi(s))$$

とも書く事ができることをしめせ.

Ex.1.10. μ が *Ber(p)*,*N(0,v)* および *Exp(λ)* のとき，I は以下になることをしめせ.

確率分布	I
$Ber(p)$	$x \log \frac{x}{p} + (1-x) \log \frac{1-x}{q}$
$N(0,v)$	$\frac{1}{2v} x^2$
$Exp(\lambda)$	$\lambda x - 1 - \log(\lambda x)$

2. 条件付き確率，条件付き期待値

Ex.2.1. *(無記憶性)* 幾何分布に従う確率変数 X に対して次を示せ.

$$P(X \geq m+n | X \geq m) = P(X \geq n), \qquad \forall m, n \geq 0.$$

Poisson 分布 $Po(\lambda), Po(\mu)$ に従うとき、次を示せ.

$$P(X = k | X+Y = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Ex.2.2. X, Y は独立な確率変数で、ともに幾何分布 $Ge(p)$ に従うとき、次を示せ.

$$P(X = k | X+Y = n) = \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Ex.2.3. *1,2,3,4* の番号がついた 4 つのボールが入った袋の中から *1* 個とりだし，さらにもう *1* 個とりだす．最初のボールの番号を X とし，Y を

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{とり出した 2 つのボールのうち少なくとも 1 つの番号が 3 以上,} \\ -1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．このとき，$E[Y|X=k], k = 1,2,3,4$ を求めよ.

Ex.2.4. *(Partition Rule 全確率の公式)* $\{B_1, B_2, \cdots\}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の分割であるとする．すなわち，B_k 達は互いに素であり，その和集合は Ω であるとする．

(1) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して全確率の公式を確かめよ: $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A|B_k)P(B_k)$.

(2) 確率変数 X に対して次をしめせ：$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} E[X|B_k]P(B_k)$.

(3) さらに，任意の $A \in \sigma\{B_1, B_2, \cdots\}$，すなわち $\{1, 2, \cdots\}$ の任意の部分集合 M に対して $A = \bigcup_{k \in M} B_k$ と表される A に対して次をしめせ：$E[X, A] = \sum_{k \in M} E[X|B_k]P(B_k)$.

Ex.2.5. A さんと B さんが $ABAB$ の順にさいころを投げ、先に *6* が出た方を勝ちとする．A さんが勝つ確率をもとめよ. *Hint:* 最初の A さんの結果によって分割する．

Ex.2.6. 表が出る確率が p のコインをくりかえし投げる．初めて表が出るまでに裏が出る回数を X とするとき，全確率の公式を用いて $E[X] = \dfrac{q}{p}$ であることを示せ.

Hint：*1* 回目の結果によって分割する．

Ex.2.7. 表が出る確率が p のコインをくりかえし投げる．初めて *2* 回続けて表または裏がでるまで投げる回数を X とする．全確率の公式を用いて $E[X] = \dfrac{2+pq}{1-pq}$ をしめせ．

Hint：合計 *4* 通りの *1* 回目と *2* 回目の結果によって分割する．

Ex.2.8. ある乱数発生装置は *Poisson* (λ) に従う非負整数値確率変数 N を発生する．この装置が発生した N に対して N 回コインを投げ，表の出る回数を X，裏の出る回数を Y とする．X と Y は独立であることをしめせ．

Hint: $x \geq 0, y \geq 0$ に対して $P(X=x, Y=y) = P(\{X=x, Y=y\} \bigcap \{N = x+y\})$ である．一方 $P(X=x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=x, N=n)$ である．

Def.&Ex.2.9. *(*確率変数の条件付き密度関数 *(conditional density function))*
$P((X,Y) \in dxdy) = f(x,y)dxdy$ とすると、$P(X \in dx) = f_X(x)dx$, ただし $f_X(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$ である．この時 X の下での Y の条件付き期待値 $E[Y|X](\omega)$ を

$$E[Y|X](\omega) = \int_{\mathbf{R}} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy \quad if \quad X(\omega) = x,$$

により定める．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して $E[E[Y|X], X \in A] = E[X, X \in A]$ を確かめよ．

Ex.2.10. $\sigma_i > 0, i = 1,2,\ |\rho| < 1$ とする．$\mathbf{R}2$-値確率変数 (X_1, X_2) の同時密度関数 $\phi(x_1, x_2)$ が

$$\begin{aligned}\phi(x_1,x_2) =& \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\end{aligned}$$

で与えられるとき、(X_1, X_2) は平均ベクトル (m_1, m_2), 共分散行列 $A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ の *2* 次元正規分布に従うと言う．この時、

(1) $X_1 = x$ の下での X_2 の *conditional density* $\phi(x_2|x_1)$ を求めよ．

(2) $E[X_2|X_1] = m_2 + \dfrac{\sigma_2 \cdot \rho}{\sigma_1}(X_1 - m_1)$, $Var[X_2|X_1] = \sigma_2^2(1-\rho^2)$ をしめせ．

3. 離散 Martingale, 条件付き期待値の演習として

基本的な性質、Martingale 変換

Ex.3.1. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の部分 σ-加法族の増大列 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ に対して確率変数の列 $\{M_n \_ n = 0, 1, 2, \cdots$ が $\{\mathcal{F}_n\}$- *Martingale* であるとは，*(i)* 各 n に対して M_n は可積分であり，*(ii)* 各 $n \geq 0$ に対して $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n](\omega) = M_n(\omega), \quad a.s.\,\omega,$ が成立することである．この時，次をしめせ．

(1) $E[M_{n+2}|\mathcal{F}_n] = M_n$ をしめせ．任意の $m \geq n \geq 0$ に対して $E[M_m|\mathcal{F}_n] = M_n$ である．

(2) 任意の $n \geq 1$ に対して $E[M_n] = E[M_0]$.

Ex.3.2. $\{X_n,\ n = 1, \cdots\}$ を独立同分布の可積分な確率変数で $E[X_k] = 0$ であるとする．$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \cdots, X_n\}$ とする．そのとき M_0 を定数，$M_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$ とおくと，

(1) $\{M_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-*Martingale* であることをしめせ．

(2) $\mathrm{Var}[X_k] = 1$ であるとき，$Z_n = M_n^2 - n$ とすると $\{Z_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-*Martingale* である．

Ex.3.3. $\{X_n\}_{n=1,\cdots}$ を独立同分布で平均 *0*、分散 *1* であるような可積分確率変数の列とし、$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k, k \leq n\}$ とする．また、各 $n = 1, \cdots$ に対して A_n を $\mathcal{F}_{n-1}$-可測であり有界な確率変数の列とする．*(*すなわち，ある $K_n > 0$ が存在してすべての $\omega \in \Omega$ に対し $|A_n(\omega)| \leq K_n$*)*.

このとき，$Y_0 = 0,\ Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k X_k,\ n = 1, 2, \cdots$ とおく．

(1) $E[Y_n] = 0,\ E[Y_n^2] = Y_0^2 + \sum_{k=1}^{n} E[A_k^2]$ をしめせ．

(2) $\{Y_n,\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-*Martingale* であることをしめせ．

(3) $Z_n = Y_n^2 - \sum_{k=1}^{n} A_k^2$ とおくと，$\{Z_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-*Martingale* である．

Ex.3.4. *(*前問の一般化*)* $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k,\ k \leq n\}$ を増大する σ-加法族の列，$\{M_n,\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$- *Martingale* であるとする．また A_n を有界な $\mathcal{F}_{n-1}$-可測確率変数の列とする *(*このとき列 $\{A_n\}$ を可予測過程という*)*．$\{M_n\}$ の $\{A_n\}$ による Martingale 変換 $\{Y_n\}$ を、

$$Y_0 = 0, \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} A_k(M_k - M_{k-1}),\ n = 1, 2,$$

により定める． $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-*Martingale* であることをしめせ．

Optional Sampling Theorem

Ex.3.5. $\{M_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$- *Martingale*, T を停止時刻であるとする．停止過程 $\{M_{n\wedge T}\}$ は適当な可予測過程 $\{A_n\}$ をとることにより $\{M_n\}$ の *Martingale* 変換として得られることをしめせ.

Ex.3.6. $\{X_n\}_{n=1,\cdots}$ を独立同分布で $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ であるとする．M_0 はある整定数, $M_n = M_0 + X_1 + \cdots + X_n,\ n \geq 1$ とおく．また $a < M_0 < b$ であるような $a, b \in \mathbf{Z}$ に対して $T = inf\{n \geq 0; M_n = a$ または $M_n = b\}$ とおく.

(1) 次の *(i)(ii)(iii)* をチェックせよ：

(i) $P(T < \infty) = 1,$ *(ii)* $E[|M_T|] < \infty,$ *(iii)* $\lim_{n\to\infty} E[M_n 1_{\{T\geq n\}}] = 0.$

(2) *Optional Sampling Theorem(OST)* の結論 $E[M_T] = E[M_0]$ より

$P(M_T = a) = \dfrac{b - M_0}{b - a}$. をしめせ.

(3) $T = inf\{n, M_n = a\ \}$ とすると，$E[M_T] = E[M_0]$ は成立しないことをしめせ.

Ex.3.7. 前問において $\{S_n^2 - n\}$ は *Martingale* である事をしめせ．これに *OST* を適用して次をしめせ：$E[T] = (b - M_0)(M_0 - a)$.

Ex.3.8. *(*非対称単純ランダムウォークから定まる *Martingale)* $\{X_n\}_{n=1,\cdots}$ を独立同分布で $P(X_k = 1) = p,\ P(X_k = -1) = q = 1 - p$ であるものとする．M_0 はある整定数, $M_n = M_0 + X_1 + \cdots + X_n,\ n \geq 0,\ Y_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{M_n},\ n \geq 0$ とおく.

(1) $T = inf\{n; M_n = M_0 + 2\}$ とおく．直接計算より $E[Y_{T\wedge 3}] = E[Y_1]$ を確かめよ.

(2) $\{Y_n\}$ は $\mathcal{F}_n$*-Martingale* であることをしめせ.

(3) a, b および停止時刻 T を *Ex.3.6.* と同様に定める．同様の十分条件 *(i)(ii)(iii)* をチェックし、$E\left[\left(\dfrac{q}{p}\right)^{M_T}\right] = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{M_0}$ を結論せよ．それより次の公式を示せ：

$$P(M_T = a) = \frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{b} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{M_0}}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{b} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{a}}.$$

(4) $p > q,\ a = 0,\ M_0 > 0$ とする時，$Z = inf\{n;\ M_n = 0\}$ とする.

$P(Z < \infty) = \lim_{b\to\infty} P(M_T = 0) = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{M_0}$ を示せ.

Martingale 収束定理

Ex.3.9. *(Polya's Urn)* 壺に最初赤玉と青玉が一つずつ入っている．無作為にボールをとり出し、そのボールと同じ色のもう *1* 個のボールとともに壺に戻す．この操作を n 回繰り返した後の赤玉のボールの個数を X_n*(ただし* $X_0 = 1$*)* とする．また、壺の中の赤玉の個数の比率を $M_n = \dfrac{X_n}{n+2}$ とおく．

(1) 帰納法を用いて $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$, $k = 1, 2, \cdots, n+1$ をしめせ．また $E[X_{n+1}|X_n] = \dfrac{n+3}{n+2}X_n$ である事をしめせ．

(2) $\{M_n\}_{\{n=0,1,\cdots\}}$ は *Martingale* であることをしめせ．

(3) *Martingale* 収束定理より、M_n はある確率変数 M_∞ に概収束し、M_∞ は $[0,1]$ 上一様分布に従う事をしめせ．

Ex.3.10. *(2* 乗可積分 *i.i.d.* に対する大数の強法則*)* $\{X_n\}_{n=1,\cdots}$ を独立同分布で $E[X_k^2] < \infty$ とする．$\mu = E[X_k]$ とし，$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $M_0 = 0$, $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mu}{k}$ とする．

(1) $\{M_n\}_{\{n=0,1,\cdots\}}$ は Martingale であることをしめせ．

(2) $\sup_n E[\,|M_n|\,] < \infty$ をしめせ．Hint：シュワルツの不等式より $E[\,|M_n|\,] \le E[\,|M_n|^2\,]^{1/2}$．

(3) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu) = M_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} M_k$ をしめせ．Hint：$X_n - \mu = n(M_n - M_{n-1})$．

(4) Martingale 収束定理より、ある確率変数 M_∞ が存在し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty$ である．したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k = M_\infty$ も成立する．これより、大数の強法則

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu) = 0, \ a.s.$$

が成立する．

一様可積分 Martingale

Ex.3.11. $\Omega = [0,1]$ 上のルベーグ測度 P は確率測度である．この確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 $\{X_n\}$ で $E[|X_n|] = 1$ あるが一様可積分ではないようなものの例を挙げよ．

Ex.3.12. *([S] P56, [F] P62, 一様可積分な関数列)*

(0) シュワルツの不等式を用いて 2 乗可積分な Y に対して $E[|Y|] \leq E[|Y|^2]^{1/2}$ をしめせ。

(1) 確率変数列 $\{X_n\}$ が $sup_n E[|X_n|^2] < \infty$ をみたすならば $\{X_n\}$ は一様可積分である．すなわち

$$\lim_{a\to\infty} sup_n E[|X_n|; |X_n| \geq a] = 0$$

である．ヒント：チェビシェフの不等式の証明

$$E[1; |X_n| \geq a] \leq \frac{1}{a} E[|X_n|; |X_n| \geq a] \leq \frac{1}{a} E[|X_n|] \qquad \text{のまねをせよ。}$$

(2) $\{X_n\}$ が $sup_n E[|X_n|^2] < \infty$ をみたし、かつ $X_n \to X$, *a.s.* ならば以下をしめせ.

(i) $E[|X|] < \infty$.

(ii) $sup_n E[|X_n - X|^2] < \infty$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|] = 0$. 特に $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$.

ヒント：*(i)* *Fatou's lemma* および *Schwarz* の不等式。*(ii)* 展開して *(i)* および仮定を使えばよい．*(iii)* *(ii)* より、$X_n - X$ に対して *(1)* と同様の結果がなりたつ．それより

$$E[|X_n - X|] = E[|X_n - X|; |X_n - X| \geq a] + E[|X_n - X|; |X_n - X| < a]$$

の右辺第 1 項を評価する。右辺第 2 項は、ルベーグ収束定理から評価できる。

Ex.3.13. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可積分な確率変数 M および部分 σ-加法族 $\{\mathcal{F}_n\}$ に対して、$M_n = E[M|\mathcal{F}_n]$ とおく．

(1) $\{M_n\}$ は $\mathcal{F}_n$-*Martingale* であることをしめせ．また $E[|M_n|] \leq E[|M|]$ であることをしめせ．次をしめせ：「$\forall\delta > 0, \exists K > 0$, *such that* $P(|M_n| > K) \leq \delta$ *for all* $n \geq 1$.」

(2) 次をしめせ：「$\forall\epsilon > 0, \exists K > 0$, *such that* $E[|M|, |M_n| > K] < \epsilon$ *for all* $n \geq 1$.」

(3) $\{M_n\}_n$ は一様可積分であることを示せ.

(4) $\mathcal{F}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ とする．$M_n \to E[M|\mathcal{F}_\infty]$, *P-a.s.* である．

Hint: (2) M 可積分 $\Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$, *such that* $E[|M|, F] < \epsilon$ *whenever* $P(F) < \delta$.

Ex.3.14. σ-加法族の列が $\mathcal{G}_{n+1} \subset G_n \subset \cdots \subset \mathcal{G}_0$ であるとする．確率変数列 $\{Y_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ が $E[|Y_n|] < \infty$ かつ $n \geq 0$ に対して $E[Y_n|\mathcal{G}_{n+1}] = Y_{n+1}$, $P-a.s.$ であるとき $\{Y_n\}$ は $\{\mathcal{G}_n\}$-*backward martingale* であるという．この時

(1) $\forall n \geq 1$, $E[Y_0|\mathcal{G}_n] = Y_n$ である．よって，前問より $\{Y_n\}$ は一様可積分である．

(2) *martingale* 収束定理と同様にして次をしめせ：「ある可積分な Y_∞ が存在して $Y_n \to Y_\infty$, $a.s.$」

Ex.3.15. *(*可積分 *i.i.d.* に対する大数の強法則，*)* $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は独立同分布な確率変数列で，$E[|X_n|] < \infty$ であるとする．$\hat{S}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\mathcal{G}_n = \sigma\{\hat{S}_n, \hat{S}_{n+1}, \cdots\}$ とする．

(1) $\{\hat{S}_n\}$ は $\{\mathcal{G}_n\}$-*backward martingale* である．

(2) $\mathcal{G}_\infty = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ とする．前問の結果より，ある可積分な $\mathcal{G}_\infty$-可測な Y_∞ が存在して $\hat{S}_n \to Y_\infty$ である．

(3) *Kolmogorov* の *0-1* 法則より Y_∞ は定数である．これより大数の強法則：

$$\hat{S}_n \to E[X_1], \quad P-a.s.$$

が言える．

Hint: *(Kolmogorov* の *0-1* 法則*)* $\{X_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を独立な確率変数列とする．$\mathcal{T}_n = \sigma\{X_n, X_{n+1}, \cdots\}$, $\mathcal{T} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$ とする．このとき，任意の $A \in \mathcal{T}$ に対して $P(A) = 0$ または $P(A) = 1$ である．