1. 条件付き確率、条件付き期待値

Def.1.1. *(条件付き期待値、舟木 P89.)* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．確率変数 X とは Ω 上の $\mathcal{F}$-可測関数のことである．$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分加法族とする．*Radon-Nikodym* の定理より、以下の条件

(1) $Y(\omega)$ は $\mathcal{G}$ 可測な確率変数であり、

(2) 任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して $E[Y, B] = E[X, B]$. が成り立つ.

を満たす確率変数 Y が唯一つ存在する．これを $E[X|\mathcal{G}]$ と書き、$\mathcal{G}$ の下での X の条件付き期待値という.

Ex.1.2. *(離散 martingale)* $\{X_n\}_{n=0,\cdots}$ を独立同分布で平均 *0*、分散 *1* であるような可積分確率変数の列とし、$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k,\ k \leq n\}$ とする．また、C_0 を定数、各 $n = 1, \cdots$ に対して C_n を $\mathcal{F}_{n-1}$-可測な可積分な確率変数の列とする．$Y_n = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k X_k,\ n = 0, 1, \cdots$ とおく．その時、

(1) $E[Y_n] = C_0,\ E[Y_n^2] = C_0^2 + \sum_{k=1}^{n} E[C_k^2]$ をしめせ.

(2) $n < m$ の時、$E[Y_m|\mathcal{F}_n] = Y_n$ であることをしめせ.

Ex.1.3. X, Y が離散確率変数であるとき、$X = x$ の下での Y の条件付き確率は

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

である．また、$X = x$ の下での Y の条件付き期待値および条件付き分散は、それぞれ

$$E[Y|X = x] = \sum_{k \in ImY} kP(Y = k|X = x) = m(x),$$
$$Var[Y|X = x] = \sum_{k \in ImY} (k - m(x))^2 P(Y = k|X = x)$$

である．確率変数 $E[Y|X](\omega)$ を、

$$E[Y|X](\omega) = E[Y|X = x] \quad if \quad X(\omega) = x,$$

により定義する．この時、*partition rule* を用いて

(1) $E[E[Y|X]] = E[\cancel{X}]$ を確かめよ.

(2) さらに、任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して $E[E[Y|X], X \in A] = E[\cancel{X}, X \in A]$ を確かめよ．これより、ここで定義した $E[Y|X]$ が *Def.1.1.* で定義した条件付き期待値 $E[Y|\mathcal{G}]$, ただし $\mathcal{G} = \sigma(X)$ と一致することがわかる．

Not.1.4. 以後、確率変数 X が分布密度関数 f を持つ時、それを $P(X \in dx) = f(x)dx$ と表現することがある．

Def.&Ex.1.5. *(確率変数の条件付き密度関数 (conditional density function))*
$P((X, Y) \in dxdy) = f(x, y)dxdy$ とすると、$P(X \in dx) = f_X(x)dx$, ただし
$f_X(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y)dy$ である．この時、

(1) X の下での Y の条件付き期待値 $E[Y|X](\omega)$ を

$$E[Y|X](\omega) = \int_{\mathbf{R}} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \quad \mathit{if} \quad X(\omega) = x,$$

により定める．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して $E[E[Y|X], X \in A] = E[X, X \in A]$ を確かめよ．これより、ここで定義した $E[Y|X]$ が *Def.1.1.* で定義した条件付き期待値 $E[Y|\mathcal{G}]$, ただし $\mathcal{G} = \sigma(X)$ と一致することがわかる．

(2) (1) より、$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ を $X = x$ の下での Y の条件付き密度関数とよぶ.

Ex.1.6. $\sigma_i > 0, i = 1, 2,\ |\rho| < 1$ とする．$\mathbf{R}^2$-値確率変数 (X_1, X_2) の同時密度関数 $\phi(x_1, x_2)$ が

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2) =& \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \times \mathit{exp}\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\end{aligned}$$

で与えられるとき、(X_1, X_2) は平均ベクトル (m_1, m_2), 共分散行列 $A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ の 2 次元正規分布に従うと言う．この時、

(1) $X_1 = x$ の下での X_2 の conditional density $\phi(x_2|x_1)$ を求めよ．

(2) $E[X_2|X_1] = m_2 + \dfrac{\sigma_2 \cdot \rho}{\sigma_1}(X_1 - m_1)$, $Var[X_2|X_1] = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$ をしめせ.

2. マルコフ過程、ブラウン運動

Ex.2.1. *(Invariance Principle, Random Walk* の極限としての *Brownian Motion.)*

(1) 中心極限定理とは何か．命題とその証明をのべよ．

(2) 単純対称ランダムウォーク $\{S_n\}$ および $\gamma > 0$ に対して連続パラメータの確率変数列 $\{X_t^\gamma\}_{t\ge 0}$ を $X_t^\gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} S_{\gamma t}$ とおく．X_t^γ の確率分布は $N(0,t)$ に法則収束することをしめせ．

Def.&Assumption.2.2. *(1)* 確率変数の列 $\{X_t\}_{t\ge 0}$ に対して $\mathcal{F}_s^X = \sigma\{X_u, u \le s\}$ とおく．$\{X_t\}_{t\ge 0}$ がマルコフ過程であるとは、任意のボレル可測関数 f および任意の $s,t > 0$ に対してある可測関数 g が存在して

$$E[f(X_{s+t})|\mathcal{F}_s^X] = g(X_s)$$

が存在することである．

(2) *(<u>仮定</u>)* 以後、$\mathcal{F}_s^X$ の下での X_{s+t} の条件付き確率分布は密度関数を持つとする *(Def.1.5.)*. この仮定の下で、*(1)* より、すべての $x, y \in \mathbf{R}$, およびすべての $s, t > 0$ に対して $p(t,x,y)$ が存在して

$$\begin{aligned} P(X_{s+t} \in dy|\mathcal{F}_s^X)(\omega) &= p(t,x,y)dy \quad \textit{if} \quad X_s(\omega) = x \\ &= p(t, X_s(\omega), y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

である．特に $s = 0$ とすると

$$p(t,x,y)dy = P(X_t \in dy|X_0 = x) \tag{2.4}$$

$$(= P_x(X_t \in dy) \quad \text{とも書く.})$$

である．これより、$p(t,x,y)$ をマルコフ過程 $\{X_t\}_{t\ge 0}$ の遷移確率密度関数 *(transition probability density function)* と呼ぶ.

(3) 式 *(2.4)* は、遷移確率に対してマルコフ過程が対応する事をしめしている．そこで式 *(2.3)* の $p(t, X_s, y)$ に対応するマルコフ過程を $\bar{X}$. と書こう．すると *(2.4)* より

$$P(X_{s+t} \in dy|\mathcal{F}_s^X)(\omega) = P_{X_s(\omega)}(\bar{X}_t \in dy)$$

あるいは、任意のボレル可測関数 f に対して

$$E[f(X_{s+t})|\mathcal{F}_s^X](\omega) = E_{X_s(\omega)}[f(\bar{X}_t)], \quad P - a.s.\omega. \tag{2.5}$$

が成り立つ．これが *[*舟木, 確率微分方程式、*p24]* におけるマルコフ性の定義である．

Ex.2.6. 以下のブラウン運動の基本的性質をしめせ.

(1) $E[B_t^{2n}] = (2n-1)!!t^n, \quad E[B_t^{2n-1}] = 0, \quad n \in \mathbf{N}$.

(2) $0 < s < t$ に対して $B_t - B_s$ と $\mathcal{F}_s$ は独立である.

(3) $E[B_t B_s] = min\{t, s\}$.

(4) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_t\}-martingale$ である、つまり $0 < s < t$ に対して $E[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$, P-a.s.

(5) 定数 $\gamma > 0$ に対して $B_t^\gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} B_{\gamma t}$ とおくと、$\{B_t^\gamma\}_{t\geq 0}$ はブラウン運動である.

Ex.2.7. 次をしめせ.

(1) $0 < s < t$ とする．$B_t = y$ の下での B_s の条件付き分布密度関数 $f(x|y)$ は

$$f(x|y) = \frac{1}{c} exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\frac{s}{t})s} \left(x - \frac{s}{t} y \right)^2 \right\}$$

であることをしめせ．c は正規化定数.

(2) これより、$E[B_s|B_t] = \dfrac{s}{t} B_t$ および $\mathrm{Var}(B_s|B_t) = s\left(1 - \dfrac{s}{t}\right)$ をしめせ.

Notation.2.8. 以後、$\{B_t\}_{t\geq 0}$ をブラウン運動、$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ をブラウン運動の時刻 t までの情報とする.

Notation.2.9. 以後 $g(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t}}, \quad g(t,x,y) = g(t, y-x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{t}}$ とおく.

また $\hat{g}(t,x,y) = g(t,x,y) - g(t,x,-y)$ とおく.

Ex.2.10. *(1)* 反射原理を用いて、$x > 0$ から出発するブラウン運動が時間 $(0,T]$ において原点を hit しない事象、すなわち $\{inf_{s\in(0,T]} B_s > 0\}$ の確率は

$$P_x(\ inf_{s\in(0,T]} B_s > 0) = \int_{-x}^{x} g(t,y) dy$$

であることをしめせ．今後この右辺を $h(T,x)$ と書く事にする.

(2) $\displaystyle \lim_{T\to\infty} \frac{h(T,x)}{\frac{2x}{\sqrt{2\pi T}}} = 1$ および $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{h(T,x)}{\frac{2x}{\sqrt{2\pi T}}} = 1$ をしめせ.

Ex.2.11. $x, y > 0$ とする．$x > 0$ から出発するブラウン運動が時間 $(0,T]$ において原点を hit しないで $B_t \in dy$ となる事象、すなわち $\{inf_{s\in(0,T]} B_s > 0, \ B_t = y\}$ の確率分布の密度関数

$$P_x(\ inf_{s\in(0,T]} B_s > 0, \ B_t \in dy) = \hat{g}(t,x,y) dy$$

で与えられることをしめせ.

3. ブラウン運動の変形から定まるマルコフ過程の例

Def.3.1. *(instantaneous mean, instantaneous variance)* マルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が

$E[X_{t+h}-X_t|X_t=x]=a(t,x)h+o(h),\quad E[|X_{t+h}-X_t|^2|X_t=x]=b(t,x)h+o(h),\quad h\to 0$

である時、*instantaneous mean* $a(t,x)$ および *instantaneous variance* $b(t,x)$ を持つという.

Ex.3.2. *(drift* 付きブラウン運動*)* $X_t=\mu t+\sigma B_t$ と定義する.

(1) 確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は *instantaneous mean* $a(t,x)=\mu$ および *instantaneous variance* $b(t,x)=\sigma$ のマルコフ過程であることを示せ.

(2) 遷移確率密度関数を求めよ.

Ex.3.3. *(Ornstein-Uhlenbeck* 過程 *)* $X_t=e^{-t}B_{e^{2t}-1}$ とおく. 明らかに $X_0=0$、かつ X_t は平均 *0* の正規分布に従う.

(1) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ はマルコフ過程であることをしめせ.

(2) $E[X_{t+h}|X_t=x]=xe^{-h}$ より *instantaneous mean* $a(t,x)=-x$ をしめせ.

(3) $E[X_{t+h}^2|X_t=x]=x^2-2h(x^2-1)+o(h)$ より *instantaneous variance* $b(t,x)=2$ をしめせ.

Ex.3.4. *(*幾何ブラウン運動 *1)* μ,σ を定数とし、$X_t=e^{\mu t+\sigma B_t}$ とおく.

(1) $s<t$ に対し $X_t=X_s exp\{\mu(t-s)+\sigma(B_t-B_s)\}$ であること、および B_t-B_s と $\mathcal{F}_s$ が独立であることを用いて、$\{X_t\}_{t\geq 0}$ がマルコフ過程であることをしめせ.

(2) $E[X_t|\mathcal{F}_s]=exp\{(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)X_s\}$ をしめせ. これよりマルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の *instantaneous mean* $a(t,x)=(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)x$ をしめせ.

(3) *instantaneous variance* $b(t,x)=\sigma^2x^2$ をしめせ.

Ex.3.5. *(*幾何ブラウン運動 *2)* $X_t=e^{\mu t+\sigma B_t}$ とおく. $P(X_t\leq y|X_s=x)$ ブラウン運動についての確率に帰着させて計算し、y について微分することにより、X_t の遷移確率密度関数 $p(t,x,y)$ が $x,y>0$ に対し

$$p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2t}\cdot y}\exp\left(-\frac{(\log\frac{y}{x}-\mu t)^2}{2\sigma^2t}\right)$$

であることをしめせ.

Ex.3.6. *(Brownian bridge, ブラウン橋 1)* $\{X_t\}_{0\le t\le 1}$ をブラウン橋とする、すなわち任意の f に対して $E[f(X.)] = E[f(B.)|B_1 = 0]$ とする.

(1) 遷移確率密度関数 $p(t,x,y) = \dfrac{g(t,x,y)g(1-t,y,0)}{g(1,0,0)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} g(t,x,y)g(1-t,y,0)$ をもつマルコフ過程であることを示せ.

2) $0 \le t \le 1$ に対して X_t の分布は $N(0, t(1-t))$ であることをしめせ.

(3) $Cov(X_s, X_t) = min\{s,t\} - st$ をしめせ.

(4) $0 \le t \le 1$ に対して $Y_t = B_t - tB_1$ とおくと、$Cov(Y_s, Y_t) = min\{s,t\} - st$ をしめせ. ブラウン橋 $\{X_t\}_{t\ge 0}$ と $\{B_t - tB_1\}_{t\ge 0}$ が確率過程として同じ確率法則を持つことをしめせ.

Ex.3.7. *(Brownian bridge, ブラウン橋 2)* ブラウン橋 $\{X_t\}_{t\ge 0}$ に対して

(1) マルコフ過程であることをしめせ.

(2) $0 \le t < t+h \le 1$ に対して $E[X_{t+h} - X_t | X_t = x] = -\dfrac{x}{1-t} h$ をしめせ.

(3) $0 \le t < t+h \le 1$ に対して $E[(X_{t+h} - X_t)^2 | X_t = x] = h + o(h), \quad h \to 0$ をしめせ.

Ex.3.8. *(反射壁ブラウン運動)* $X_t = |B_t|$ とする.

(1) $\{X_t\}_{t\ge 0}$ はマルコフ過程であることをしめせ.

(2) 反射原理を用いて、$\{X_t\}_{t\ge 0}$ の遷移確率密度関数は $p(t,x,y) = g(t,x,y) + g(t,x,-y)$ であることをしめせ.

(3) $E[X_t] = \sqrt{\dfrac{2t}{\pi}}, \quad \mathrm{Var}[X_t] = \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\right) t$ をしめせ.

Ex.3.9. *(Brownian meander)* $T > 0$ とし、$\{X_t\}_{0\le t\le T}$ を「$s \in (0,T]$ において $X_s > 0$ と条件づけたブラウン運動」とする. すなわち、任意の f に対して

$$E[f(X.)] = E[f(B.)|B_s > 0, \forall s \in (0,T]\,]$$

である. この $\{X_t\}_{t\ge 0}$ を Brownian meander とよぶ.

(1) マルコフ過程であることをしめせ.

(2) *Ex.2.10.* において定義された $h(T,x)$ をもちいて、$x, y > 0$ の時 Brownian meander の遷移確率は、

$$p(t,x,y) = \frac{1}{h(T,x)} \hat{g}(t,x,y) h(T-t,y)$$

であることをしめせ.

(3) *Ex.2.10, (2)* の結果および $\hat{g}$ の定義より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\hat{g}(t,x,y)}{h(T,x)} = \sqrt{2\pi T}\frac{\partial}{\partial x}g(t,x,y)|_{x=0}$$

をしめせ．これを用いて、$p(t,0,y) = \lim_{x\to 0} p(t,x,y)$ は

$$p(t,0,y) = \frac{\sqrt{2\pi T}\cdot y}{t}g(t,0,y)h(T-t,y)$$

であることをしめせ.

Ex.3.10. *(Bessel 過程 1)* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を「$s\in(0,\infty)$ において $X_s>0$ と条件づけたブラウン運動」とする．すなわち、任意の f に対して

$$E[f(X.)] = E[f(B.)|B_s>0, \forall s\in(0,\infty)\,]$$

である．この $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を *Bessel* 過程とよぶ.

(1) マルコフ過程であることをしめせ.

(2) *Bessel* 過程の遷移確率 $p(t,x,y)$ は *Brownian meander* の遷移確率の $T\to\infty$ での極限として得られる．この事より

$$p(t,x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\hat{g}(t,x,y) & \text{if } x,y>0 \\ \dfrac{2y^2}{t}g(t,0,y) & \text{if } x=0, y>0 \end{cases}$$

をしめせ.

Ex.3.11. *(Bessel 過程 2)* B_1, B_2, B_3 を独立なブラウン運動とし、
$Y_t = \sqrt{B_1(t)^2+B_2(t)^2+B_3(t)^2}$ とする．

(1) 準備として、確率変数 $X_i, i=1,2,3$ がそれぞれ $N(a_i,v)$ に従う時、$a_1^2+a_2^2+a_3^2=a^2$ を満たすすべての (a_1,a_2,a_3) に対して $X_1^2+X_2^2+X_3^2$ は同じ確率分布に従うことをしめせ．これを用いて、任意の f に対して

$$E[f(Y_{s+t})|\sigma\{Y_s\}] = E[f(X_{s+t})|\sigma\{B_1(s),B_2(s),B_3(s)\}]$$

であることをしめせ.

(2) $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ はマルコフ過程であることをしめせ.

(3) *(1)* より、すべての $x>0, y>0$ に対して

$$\begin{aligned} P(X_{s+t}\leq y|X_s=x) &= P(X_{s+t}\leq y|B_1(s)=0, B_2(s)=0, B_3(s)=x) \\ &= \int_{u^1+v^2+w^2\leq y^2} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} exp\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2+(w-x)^2)\}dudvdw \\ &= \int_0^y \frac{r}{x}\frac{1}{(2\pi t)^{1/2}}\{e^{-\frac{1}{2t}(r-x)^2}-e^{-\frac{1}{2t}(r+x)^2}\}dr \end{aligned}$$

であることを確かめよ.（最後の等式は極座標変換を用いる.）

(4) 上式を y について微分することにより、$\{Y_t\}_{t\geq 0}$ の遷移確率密度関数は $x>0, y>0$ に対して

$$p(t,x,y)=\frac{y}{x}\hat{g}(t,x,y)$$

であることをしめせ. すなわち $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ と *Ex.3.10.* で考察した $\{X_t\}_{t\geq 0}$ とは同じマルコフ過程である.

4. <u>確率解析入門 (確率積分, Ito formula とその応用)</u>

この節を通して、$\{t_k\}_{k=0,\cdots,n}$ を区間 $[0,t]$ の n 等分点とする．すなわち $t_k = \dfrac{kt}{n}$ とする．また 1 次元ブラウン運動 $\{B_t\}$ に対して $V_k = B_{t_k},\ k = 0,1,\cdots,n$ とする．また、$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s,\ s \le t\}$ とおく．

Ex.4.1. $f(t,x) \in C^2([0,\infty)\times\mathbf{R})$ に対して確率積分で定義される確率過程 $X_t = \int_0^t f(t,B_t)dB_t$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-*martingale* であることをしめせ．特に、$E[\int_0^t f(s,B_s)dB_s\,] = 0$ である．

Ex.4.2. *(ブラウン運動の 2 次変分* $(dB_t)^2 \doteq dt.$ *)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}-V_k)^2 = t$ *(*L^2*-収束)* である事を以下の手順で示せ.

(1) $Z_k = (V_{k+1}-V_k)^2 - \dfrac{k}{n}$ とおくと、$\{Z_k\}_{k=0,\cdots,n-1}$ は *i.i.d.* である事を示せ．$E[Z_k]$, $E[Z_k^2]$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E[\,|\sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}-V_k)^2 - t|^2\,] = 0$、すなわち上の結論を示せ.

Ex.4.3. 等式 $\displaystyle\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ を以下の手順で示そう.

(1) $\displaystyle 2\sum_{k=0}^{n-1}V_k(V_{k+1}-V_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}^2 - V_k^2) - \sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}-V_k)^2$ を確かめよ.

(2) 確率積分の定義 $\displaystyle\int_0^t B_s dB_s = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k(V_{k+1}-V_k)$ とブラウン運動の *2* 次変分の事実 *(*前問*)*、および *(1)* を用いて結論の等式を示せ.

Ex.4.4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k(V_{k+1}-V_k)^2 = \int_0^t B_s ds$ *(*L^2*-収束)* である事を以下の手順で示せ.

(1) $\displaystyle Z_k = V_k(V_{k+1}-V_k)^2 - \int_{t_k}^{t_{k+1}} B_s ds$ とおく．$E[Z_k] = 0$ を示せ．*Hint:* ブラウン運動の定義.

(2) $E[Z_k^2] = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ である事を示せ.

(3) $j < k$ の時 $E[Z_j Z_k] = 0$ を示せ．*Hint:* $E[Z_k|F_{t_k}] = 0$ である事を見よ.

(4) *(1)(2)(3)* より、結論の等式を示せ.

Ex.4.5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}-V_k)^3 = 0$ *(*L^2*-収束)* を示せ．*Hint:*

$E[\,|\sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}-V_k)^3|^2\,] = \sum_{k=0}^{n-1}E[(V_{k+1}-V_k)^6] + 2\sum_{k<j}E[(V_{k+1}-V_k)^3(V_{j+1}-V_j)^3]$ の右辺の各項はブラウン運動の定義より計算できる.

Ex.4.6. 等式 $B_t^3 = 3\int_0^t B_s^2 dB_s + 3\int_0^t B_s ds$ を以下の手順で示そう.

(1) $3\sum_{k=0}^{n-1}V_k^2(V_{k+1}-V_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}^3 - V_k^3) - 3\sum_{k=0}^{n-1}V_k(V_{k+1}-V_k)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}(V_{k+1}-V_k)^3$ を確かめよ.

(2) 確率積分の定義 $\int_0^t B_s^2 dB_s = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k^2(V_{k+1}-V_k)$ と *Ex.4.4., Ex.4.5.* の結果を用いて結論の等式を示せ.

Ex.4.7. $f(t,x), g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times\mathbf{R})$ に対して $X_t = \int_0^t f(t,B_t)dB_t$, $Y_t = \int_0^t g(t,B_t)dB_t$ とする. *Ito formula* より、$Z_t = X_tY_t$ に対して次が成り立つ事をしめせ.

$$dZ_t = Y_t f(t,B_t)dB_t + X_t g(t,B_t)dB_t + f(t,B_t)g(t,B_t)dt$$

特に $\int_0^t f(t,B_t)dB_t \cdot \int_0^t g(t,B_t)dB_t - \int_0^t f(t,B_t)g(t,B_t)dt$ は $\mathcal{F}_t$-martingale であり、

$$E[\int_0^t f(t,B_t)dB_t \cdot \int_0^t g(t,B_t)dB_t] = \int_0^t f(t,B_t)g(t,B_t)dt$$

である.

Ex.4.8. *($dB_1dB_2 \doteq 0$.) 2* つの <u>独立な</u>*1* 次元ブラウン運動 $\{B_1(t)\}$, $\{B_2(t)\}$ に対して $U_k = B_1(t_k)$,$V_k = B_2(t_k)$ $k = 0,1,\cdots,n$ とする.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_k)(V_{k+1}-V_k) = 0$ *(L^2-*収束*)* である事を示せ. *Hint:* ブラウン運動の独立増分性と、U と V の独立性から計算できる.

(2) 次の等式を確かめよ.

$$\sum_{k=0}^{n-1}V_k(U_{k+1}-U_k) + \sum_{k=0}^{n-1}U_k(V_{k+1}-V_k) - \sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}V_{k+1}-U_kV_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_k)(V_{k+1}-V_k).$$

(3) *(1)(2)* より $d(B_1(t)B_2(t)) = B_1(t)dB_2(t) + B_2(t)dB_1(t)$ を結論せよ.

Ex.4.9. *(幾何ブラウン運動, Ex.3.4. の SDE を用いた別証)* $\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0$ を定数とし、$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}$ とする．この時 X_t は *SDE*

$$dX_t = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

の解であることを示せ．特に、X_t の *instantaneous mean* および *instantaneous variance* は $a(t,x) = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)x$, $b(t,x) = \sigma x$ である．

Ex.4.10. *(SDE の解としての Ornstein-Uhlenbeck)* 定数 $\beta > 0$, $\sigma > 0$ に対して *SDE:* $dX_t = -\beta X_t dt + \sigma dB_t$ の解は $X_t = X_0 e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dB_s$ で与えられる事を示せ．これより、$\{X_t\}_{t \geq 0}$ は任意の $t \geq 0$ に対し $E[X_t] = X_0 e^{-\beta t}$, かつ任意の $0 \leq t_1 \leq t_2$ に対し $Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = \dfrac{\sigma^2}{2\beta}(e^{t_1\beta} - e^{-t_1\beta})e^{-t_2\beta}$ であるようなガウス過程であることを示せ．特に X_t の確率分布は正規分布 $N(0, \frac{\sigma^2}{2\beta})$ に法則収束する事をしめせ.

Ex.4.11. *(SDE の解としてのブラウン橋)* *SDE:* $dX_t = dB_t - \dfrac{X_t}{1-t}dt$ の解は $X_t = (1-t)\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s$ で与えられる事を示せ．これより解 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ は任意の $t \geq 0$ に対し $E[X_t] = 0$, かつ任意の $0 \leq t_1 \leq t_2$ に対し $Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = t_1(1-t_2)$ で与えられるガウス過程であることを示せ．すなわち $\{X_t\}_{t \geq 0}$ はブラウン橋である.

Ex.4.12. *(SDE の解としての Bessel 過程) SDE:*

$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + B_t, \quad X_0 = x_0 > 0$$

の解を *3* 次元 *Bessel* 過程という．$B_1(t), B_2(t), B_3(t)$ を独立なブラウン運動とする．この時 $X_t = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)}$ が *3* 次元 *Bessel* 過程であることを示そう.

(1) *Ex.4.8.* の結果を用いて、*Ito formula* より

$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + \sum_{i=1}^{3} \frac{B_i(t)}{X_t} dB_i(t)$$

である事を示せ.

(2) $\tilde{B}_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{B_i(t)}{X_t} dB_i(t)$ とおく．$f(x) = e^{i\xi x}$ に対して *Ito formula* を適用することにより、$d(e^{i\xi \tilde{B}_t}) = martingale - \dfrac{\xi^2}{2} e^{i\xi \tilde{B}_t} dt$ であり、したがって $y_t = E[e^{i\xi \tilde{B}_t}]$ は初期値問題 $y_t' = -\dfrac{\xi^2}{2} y_t$, $y_0 = 1$ の解であることを示せ．これより $E[e^{i\xi \tilde{B}_t}] = e^{-\frac{1}{2}\xi^2 t}$ であり、$\tilde{B}_t$ はブラウン運動であることを確かめよ.