解 析 力 学： 微小振動論

岡村 隆

2009 年 12 月 27 日

1　はじめに

運動方程式や Lagrangian (および境界条件, 初期条件) に, すべての物理情報が含まれているとは言え, 方程式を見ただけで, 現象が理解できる訳ではない. 実際に方程式を解いて, 運動を見ることが重要である. しかし, 現実を記述する運動方程式 (EOM) や Lagrangian は, 解析的に解けないものがほとんどである.

こんなとき, 現実的対応の一つは次のようなものだろう：本質を失わない程度に方程式を簡単化して, まずは「解ける問題」に置き換えて理解せよ. そして, 簡単化の過程で捨てたものは, 「解ける問題」の結果に補正として反映させれば良かろう $\cdots$. このような議論・計算の進め方が, 摂動的な考え方である.

2　摂動論の枠組み

摂動論は, 解きたい問題を, メイン（非摂動部分 or ゼロ次部分）とサブ（摂動部分）に分けることで始まる. そして, 非摂動部分の問題が解いて主要なことを把握し, あとは, 摂動部分を補正として少しずつ取り込んでいく. もちろん, 非摂動部分が解けなければ話にならないので, ゼロ次が解けることが重要である. 具体例を見た方が分かりやすい. 講義で説明した例を再録する.

Q.　　2 次方程式 $f_\epsilon(x) := x^2 - 2\,\epsilon\, x - 1 = 0$ を, 解の公式を知らないとして, どう解くか？[*1]

仮に, ϵ の大きさが非常に小さい $|\epsilon| \ll 1$ とする. このとき, 解を見つけることができる可能性がある. なぜなら, $|\epsilon| \ll 1$ より $f_\epsilon(x)$ を非摂動部分 $f_0(x) = x^2 - 1$ と摂動部分 $-2\,\epsilon\, x$ とに分けることができ, $f_0(x) = x^2 - 1 = 0$ は解の公式を知らずとも, 目の子で $x = \pm 1$ が解だと分かるからである.

次に, どのようにして, 摂動部分の効果を取入れることができるだろうか？ 次のように推論する：

> ϵ の大きさが非常に小さいので, 恐らく, その効果はゼロ次解 $x = \pm 1$ を少しズラすだけだろう. そして, そのずれ具合いは ϵ 程度だろうから, ϵ を考慮した真の解を $x(\epsilon)$ とすると, それは
>
> $$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon\, x_1 + \epsilon^2\, x_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k\, x_k \ , \tag{2.1}$$
>
> のように, 微小な ϵ でベキ展開した形で表現できるだろう. ここで, x_0, x_1, x_2, $\cdots$ は数係数であるが, これが全て分かれば, 真の解 $x(\epsilon)$ が分かることになる. すべての（無限個の）数係数を求めるのは無理としても, $|\epsilon|$ が十分小さければ, 最初の数項だけで真の解をよく近似するので, 近似解を得ることはできるはず. 結局問題は, 2 次方程式 $f_\epsilon(x) = 0$ から, 数係数 x_0, x_1, x_2, $\cdots$ を求めることに帰着する.

[*1] 自分で解の公式をつくれば良いだけであるが, ここでは, それができないとする.

この推論を実行するには, 推測した解の形 (2.1) を, $f_\epsilon(x)=0$ に代入し, ϵ のベキで整理する：

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \left(x_0+\epsilon\,x_1+\epsilon^2\,x_2+\cdots\right)^2-2\,\epsilon\left(x_0+\epsilon\,x_1+\epsilon^2\,x_2+\cdots\right)-1 \\ &= x_0^2-1+2\,\epsilon\,(x_0\,x_1-x_0)+\epsilon^2\,\left(2\,x_0\,x_2+x_1^2-2\,x_1\right)+\cdots=0\ . \end{aligned}$$

この方程式は, ϵ に依らず成り立たなければならない, つまり, ϵ の恒等式である. よって, ϵ の各次数の係数がゼロでなければならないので,

$$\begin{array}{llll} \epsilon^0 : & x_0^2-1=0 & \to & x_0=\pm 1\ , \\ \epsilon^1 : & x_0(x_1-1)=0 & \to & x_1=1\ , \\ \epsilon^2 : & 2\,x_0\,x_2+x_1^2-2\,x_1=0 & \to & x_2=\dfrac{1}{2\,x_0}=\dfrac{x_0}{2}=\pm\dfrac{1}{2}\ , \\ & \vdots & \to & \vdots \end{array}$$

のように, 数係数 x_0, x_1, x_2, $\cdots$ が,「ドミノ倒し」のように低次の係数から順番に決まっていく. 結局,

$$x(\epsilon)=x_0+\epsilon\,x_1+\epsilon^2\,x_2+\cdots=\pm 1+\epsilon\pm\frac{\epsilon^2}{2}+\cdots=\epsilon\pm\left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\right)+\cdots\ , \tag{2.2}$$

という解が, 摂動の考え方で得られた. ϵ^2 の係数まで求めたので, ϵ について 2 次近似の解, などと言ったりする.

この解が真の解をよく近似しているか調べよう. 幸い, 2 次方程式の真の解は, $x_{真}(\epsilon)=\epsilon\pm\sqrt{1+\epsilon^2}$ と知っている. 摂動的に得た解 (2.2) は, $|\epsilon|\ll 1$ でよい近似となっているはずである. そこで, $x_{真}(\epsilon)$ を ϵ で Taylor 展開すると,

$$x_{真}(\epsilon)=\epsilon\pm\left(1+\epsilon^2\right)^{1/2}=\epsilon\pm\left(1+\frac{\epsilon^2}{2}\right)+O(\epsilon^3)\ ,$$

を得る. たしかに, 摂動的な解 (2.2) は, 真の解と（ϵ^2 の精度で）一致している.

3　微小振動

摂動の考え方を力学の問題に適用しよう.*2 一つの典型例が, これから考察する微小振動である. Sec.2 における ϵ の役割を果たすのは, 静止解（釣合いの位置）からの変位である. はじめ微小であったこの変位が, 時間とともにどう発展するかを議論する.

変位が常に微小に留まっていれば, 静止解は（摂動）**安定**, 時間とともに増大すれば, 静止解は（摂動）**不安定**と呼ばれる.

3.1　1 自由度系の例： 運動方程式経由

x 軸上を運動する質量 m の質点がある. 質点が位置座標 X にあるとき, 質点には, 時間によらない力 $F(X)$ がはたらくものとする. 時刻 t における質点の位置座標を $x(t)$ とすれば, 質点にはたらく力は $F(x(t))$ なので, その運動方程式は, 下記のようになる：

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t))\ . \tag{3.1}$$

釣合いの位置（静止解）が存在するとして, その位置を $x^{(0)}$ と記そう. 釣合いの位置で質点にはたらく力はゼロなので, $x^{(0)}$ は $F(x^{(0)}) = 0$ を満たす. 逆に, 静止解は $F(x) = 0$ の解として得られる.

さて, いま関心があるのは, 何らかの影響で質点が静止解 $x^{(0)}$ からズレたらどうなるか？ という問題である. もちろん, 運動方程式 (3.1) が解ければ全ての問いに答えられるので, ここでは, 静止解を求めるのが精一杯で, 一般の運動を解くまでは至らない状況を想定している.

直感的には, 「静止解から $\delta x(t)$ だけズレた位置で受ける力 $F\big(x^{(0)} + \delta x(t)\big)$ が, Taylor 展開

$$F\big(x^{(0)} + \delta x(t)\big) = F\big(x^{(0)}\big) + \delta x(t)\,F'\big(x^{(0)}\big) + \cdots = \delta x(t)\,F'\big(x^{(0)}\big) + \cdots\ , \tag{3.2}$$

できるなら, 力は変位 $\delta x(t)$ にほぼ比例する, すなわち, バネの運動と変わらないだろう」と予想できる. この直感的な予想を, 変位に関する摂動論としてキチンと述べたものが, 微小振動論である.

静止解からの変位を $\delta x(t) := x(t) - x^{(0)}$ とし, その変位の大きさが十分小さいものとする. 変位が微小であることを表現するために, 微小パラメータ ϵ $(0 < \epsilon \ll 1)$ を導入すると便利である. そして, Sec.2 における例と同様に考えて, 摂動解が

$$x(t) = x^{(0)} + \epsilon\,x^{(1)}(t) + \epsilon^2\,x^{(2)}(t) + \cdots\ , \tag{3.3}$$

のように ϵ のベキ展開で表現できるとしよう：

$$\delta x(t) = \epsilon\left(x^{(1)}(t) + \epsilon\,x^{(2)}(t) + \cdots\right) =: \epsilon\,y(t)\ . \tag{3.4}$$

すると, 実際の変位 $\delta x(t)$ を求めることは, ϵ の各次数の “係数” $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots$ の運動を解くことに帰着する. たった 1 つの量 $\delta x(t)$ の運動を求める為に, 無限個の $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots$ を使うのは無駄だと思うかも知れないが, これは一種の取引である：『1 つの量 $\delta x(t)$ 自体を求めることは出来ない. その代わり, それを $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots$ を導入して無限個に分解すると, （以下で見るように）個々のものは解くことができる.』

*2 講義時での説明と若干異なるかもしれないが, 中身は同じである.

運動方程式 (3.1) を, まず $y(t)$ で書き直し, 続いて Eq.(3.4) を思い出すと,

$$
\begin{aligned}
0 &= m\,\frac{d^2}{dt^2}\left(x^{(0)}+\epsilon\,y(t)\right) - F\big(x^{(0)}+\epsilon\,y(t)\big) \\
&= \epsilon\,m\,\ddot{y}(t) - \left[\ F\big(x^{(0)}\big) + \big\{\epsilon\,y(t)\big\}\,F'\big(x^{(0)}\big) + \frac{\big\{\epsilon\,y(t)\big\}^2}{2}\,F''\big(x^{(0)}\big) + O(\epsilon^3)\ \right] \\
&= -F\big(x^{(0)}\big) + \epsilon\,m\,\left(\ddot{x}^{(1)}(t) + \epsilon\,\ddot{x}^{(2)}(t) + \cdots\right) - \epsilon\,F'\big(x^{(0)}\big)\,\left(x^{(1)}(t) + \epsilon\,x^{(2)}(t) + \cdots\right) \\
&\qquad - \frac{\epsilon^2}{2}\,F''\big(x^{(0)}\big)\,\left(x^{(1)}(t) + \epsilon\,x^{(2)}(t) + \cdots\right)^2 + O(\epsilon^3) \\
&= -F\big(x^{(0)}\big) + \epsilon\,\left[\ m\,\ddot{x}^{(1)}(t) - F'\big(x^{(0)}\big)\,x^{(1)}(t)\ \right] \\
&\qquad + \epsilon^2\left[\ m\,\ddot{x}^{(2)}(t) - F'\big(x^{(0)}\big)\,x^{(2)}(t) - \frac{F''\big(x^{(0)}\big)}{2}\,\left(x^{(1)}(t)\right)^2\ \right] + O(\epsilon^3)\ .
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

を得る．ここで, $F\big(x^{(0)}+\epsilon\,y(t)\big)$ を $x^{(0)}$ まわりで Taylor 展開した.

この方程式は ϵ の恒等式なので, 前章の 2 次方程式の例と同様, ϵ の各次数の係数をゼロとして

$$
\epsilon^0\ :\quad F\big(x^{(0)}\big) = 0\ , \tag{3.6}
$$

$$
\epsilon^1\ :\quad m\,\ddot{x}^{(1)}(t) - F'\big(x^{(0)}\big)\,x^{(1)}(t) = 0\ , \tag{3.7}
$$

$$
\epsilon^2\ :\quad m\,\ddot{x}^{(2)}(t) - F'\big(x^{(0)}\big)\,x^{(2)}(t) = \frac{F''\big(x^{(0)}\big)}{2}\,\left(x^{(1)}(t)\right)^2\ , \tag{3.8}
$$

$$
\vdots
$$

を得る．Eq.(3.6) は, 静止解を求める方程式であり, 解けているとしよう．その結果から, Eq.(3.7) の左辺 2 項目の $F'\big(x^{(0)}\big)$ を評価できる．その具体的な値はともかく, 定数なので $k := -F'\big(x^{(0)}\big)$ と置こう.

すると, Eq.(3.7) は質量 m の質点がバネ定数 k のバネから力を受けているときの運動方程式に他ならないことが分かる．（ただし, バネ定数 k は関数 $F(x)$ によるので, 正とは限らない.）そして我々は,（k の符合によらず）Eq.(3.7) を解くことができるので, $x^{(1)}(t)$ を求めることができる.

すると, 続いて Eq.(3.8) の右辺を評価できる．この方程式の左辺は Eq.(3.7) の左辺と同形で, 質量 m の質点がバネ定数 k のバネから力を受けているときのものである．よって, Eq.(3.8) は, バネ定数 k のバネに繋がれた質量 m の質点に, Eq.(3.8) の右辺で与えられる強制力がはたらく問題 〜 強制振動問題 〜 に他ならない．我々は, 強制振動問題も解くことができるので, $x^{(2)}(t)$ を求めることができる.

すると, $\cdots$

このように, 前章の 2 次方程式の例と同様, ϵ の低次の "係数" から順番に「ドミノ倒し」のようにして求めることができる.[*3]

[*3] 実は, 2 次摂動の方程式 (3.8) には問題がある．解くことはできるのだが, 得られる解の振る舞いが「厄介な問題」を引き起こす．摂動展開の精神は, ゼロ次解 $x^{(0)}$ に徐々に補正を取入れて真の解に近付く, ということであり, Eq.(3.3) の各項に $\big|\,\epsilon\,x^{(1)}(t)\,\big| \gg \big|\,\epsilon^2\,x^{(2)}(t)\,\big| \gg \cdots$ という序列があってはじめて有効である．「厄介な問題」というのは, 序列の一つ $\big|\,\epsilon\,x^{(1)}(t)\,\big| \gg \big|\,\epsilon^2\,x^{(2)}(t)\,\big|$ が有限時間で破れてしまう, という問題である．Eq.(3.8) が共鳴を引き起こす方程式なのが原因だが, この「厄介な問題」はクリアできることが知られている．その方法については講義内容の範囲を越えるので, 以下では線形摂動のレベル（ϵ について 1 次の量 $\epsilon\,x^{(1)}$）までを扱う.

「厄介な問題」をクリアする方法自体はとても自然で, 強制振動と共鳴現象が消化できていれば理解できるので, 興味がある人は, $\cdots$.

3.1.1 線形摂動

以下では, 線形摂動のレベルまでで, 現象を考察する.（ϵ について 1 次の量 $\epsilon\, x^{(1)}$ まで考慮する, ということ.）はじめから, このレベルに限定して考察するつもりなら, 上記のように一般的に計算を実行する必要はないので, 手続きは簡単である. レシピを再録すると,

(1) 静止解 $x^{(0)}$ のまわりで, $x(t)$ を ϵ の 1 次まで 展開する.（簡略化して, $x^{(1)} \to u(t)$ と記す.）

$$x(t) = x^{(0)} + \epsilon\, u(t) + \cdots \ . \tag{3.9}$$

(2) Eq.(3.9) を方程式 (3.1) に代入し, 1. と同様, ϵ について 1 次まで 評価して u の方程式を得る.

$$\begin{aligned} 0 &= m\,\frac{d^2}{dt^2}\Big(x^{(0)} + \epsilon\, u(t) + \cdots\Big) - F\big(x^{(0)} + \epsilon\, u(t) + \cdots\big) \\ &= \epsilon\, m\, \ddot{u}(t) - \Big[\ F\big(x^{(0)}\big) + \big\{\epsilon\, u(t)\big\}\, F'\big(x^{(0)}\big)\ \Big] + \cdots \\ &= \epsilon\ \Big[\ m\, \ddot{u}(t) - F'\big(x^{(0)}\big)\, u(t)\ \Big] + \cdots \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = m\ \ddot{u}\ (t) + k\, u(t)\ . \tag{3.10}$$

ここで, $F\big(x^{(0)}\big) = 0$ を先取りし, $k := -F'\big(x^{(0)}\big)$ と置いた.

以上である. あとは, 1 次摂動の方程式 (3.10) を解いて解の振る舞いを考察すれば良い.

$\mathbf{k = -F'\big(x^{(0)}\big) > 0}$ のとき: 正のバネ定数をもつ単振動の問題に相当する.
$\omega := \sqrt{k/m}$ として, Eq.(3.10) は次のように解かれる：

$$0 = \ddot{u}(t) + \omega^2\, u(t) \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = A\, \cos(\omega t) + B\, \sin(\omega t)\ . \tag{3.11}$$

これから, 質点の位置を静止解から少しズラしたとき, その変位の振幅は一定で, 静止解のまわりで単振動することが分かる. よって, $F'\big(x^{(0)}\big) < 0$ のとき, 静止解は（摂動）**安定**である.

$\mathbf{k = -F'\big(x^{(0)}\big) < 0}$ のとき: 負のバネ定数をもつ問題に相当する. ズレた方向に力がはたらくので, さらにズレていくことが分かる.
$\kappa := \sqrt{-k/m}$ として, Eq.(3.10) は次のように解かれる：

$$0 = \ddot{u}(t) - \kappa^2\, u(t) \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = C\, e^{\kappa t} + D\, e^{-\kappa t}\ . \tag{3.12}$$

これから, 質点の位置を静止解から少しズラしたとき, しばらく時間が経過すると, "必ず" [*4] 変位は指数的に増大する. よって, $F'\big(x^{(0)}\big) > 0$ のとき, 静止解は（摂動）**不安定**である.

$\mathbf{k = -F'\big(x^{(0)}\big) = 0}$ のとき: このとき, 変位の 1 次摂動 u に力がはたらかないので, 静止解が安定か否かは 1 次摂動のレベルでは判断付かない.（**中立安定**と言う.）はっきりしたことを言うには, 2 次摂動を見る必要がある.

[*4] 例外がある. $C = 0$ のときである. しかし, この例外は解全体の集合の中で微々たるものである. 解は 2 つの実数 (C, D) の組で与えられるので, 視覚的には, 横軸 C, 縦軸 D とする 2 次元平面上の各点が, それぞれ一つの解を表すことになる. すると, 例外となる $C = 0$ をもつ解は, D 軸上の各点に対応するが, 平面状に広がった解の集合の中で, 直線である D 軸はマイナーもいいところである（直線の面積はゼロ）.

これら 1 次摂動の解の 3 種の振る舞いは, ポテンシャルを導入すると視覚的にも分かりやすくなる. ポテンシャル $V(X)$ と力 $F(X)$ の関係が $F(X) = -\frac{d}{dX}V(X)$ であることに注意すると,

- $\mathbf{V''\big(x^{(0)}\big) > 0}$ （下に凸なポテンシャル）のとき, 静止解は（摂動）**安定**である
- $\mathbf{V''\big(x^{(0)}\big) < 0}$ （上に凸なポテンシャル）のとき, 静止解は（摂動）**不安定**である
- $\mathbf{V''\big(x^{(0)}\big) = 0}$ （非常に平らなポテンシャル）のとき, 静止解は**中立安定**である

となる.

3.2　1 自由度系の例： Lagrangian 経由

運動方程式が Lagrangian から導ける場合, 様々な利点があった. 運動方程式そのものよりも, Lagrangian の性質を調べた方が保存則を見通し良く見つけられる, などである. そこで, 微小振動を Lagrangian から眺めたらどう見えるか, 考察する.

x 軸上を運動する質量 m の質点が, 時間に依存しないポテンシャル V の下で運動している場合, その Lagrangian と Euler-Lagrange 方程式は,

$$L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2(t) - V\big(x(t)\big)\ , \tag{3.13}$$

$$\Longrightarrow\quad 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial x(t)} = \frac{d}{dt}\big(m\,\dot{x}(t)\big) + V'\big(\dot{x}(t)\big) = m\,\ddot{x}(t) + V'\big(\dot{x}(t)\big)\ , \tag{3.14}$$

となる. ポテンシャル $V(X)$ が及ぼす力は $F(X) = -V'(X)$ で与えられるので, Eq.(3.14) は Eq.(3.1) に他ならない.

それでは,

$$V'\big(x^{(0)}\big) = -F\big(x^{(0)}\big) = 0\ , \tag{3.15}$$

を満たす静止解 $x^{(0)}$ からの微小変位 (3.4)

$$\delta x(t) := x(t) - x^{(0)} = \epsilon\left(x^{(1)}(t) + \epsilon\, x^{(2)}(t) + \cdots\right) =: \epsilon\, y(t)\ , \tag{3.16}$$

を考えよう.

Sec. 3.1.1 で見たように, 線形摂動のレベルでの運動方程式は, $x(t)$ を静止解 $x^{(0)}$ のまわりに ϵ について <u>1 次まで</u> 展開する. 次にそれを運動方程式に代入し, 運動方程式を ϵ について <u>1 次まで</u> 展開することで, 1 次摂動 $x^{(1)}(t) = u(t)$ の方程式を得る.

同等のことを Lagrangian レベルで実行するには, どのようにすれば良いだろうか？ 答を先に言うと,

(1) $x(t)$ を, Eq.(3.9) のように, 静止解 $x^{(0)}$ のまわりに ϵ の <u>1 次まで</u> 展開する.
(2) Eq.(3.9) を Lagrangian に代入し, ϵ について <u>**2 次**まで</u> 評価して u の Lagrangian を得る.

が, そのレシピである. このレシピを見て, すぐ思い付く疑問がある：

- Lagrangian の $O(\epsilon)$ 部分はどうしたのだろう？
- Lagrangian は $O(\epsilon^2)$ まで評価しなければならないのに, $x(t)$ は $O(\epsilon)$ までの評価で良いのか？

例えば, $x^2(t)$ を $O(\epsilon^2)$ まで評価したいとする. 丁寧に計算すれば,

$$\begin{aligned}
x^2(t) &= \Big\{x^{(0)} + \epsilon\, x^{(1)}(t) + \epsilon^2\, x^{(2)}(t) + O(\epsilon^3)\Big\}^2 = \Big\{x^{(0)} + \epsilon\, x^{(1)}(t) + \epsilon^2\, x^{(2)}(t)\Big\}^2 + O(\epsilon^3) \\
&= \Big(x^{(0)}\Big)^2 + 2\, x^{(0)}\, \epsilon\, \Big\{x^{(1)}(t) + \epsilon\, x^{(2)}(t)\Big\} + \epsilon^2\, \Big\{x^{(1)}(t) + \epsilon\, x^{(2)}(t)\Big\}^2 + O(\epsilon^3) \\
&= \Big(x^{(0)}\Big)^2 + 2\,\epsilon\, x^{(0)}\, x^{(1)}(t) + \epsilon^2\, \Bigg[\, 2\, x^{(0)}\, x^{(2)}(t) + \Big\{x^{(1)}(t)\Big\}^2\, \Bigg] + O(\epsilon^3)\ ,
\end{aligned}$$

となる. これを, はじめから $x(t) = x^{(0)} + \epsilon\, x^{(1)}(t) + \cdots$ として 2 次部分を無視して評価すると,

$$\begin{aligned}
x^2(t) &= \Big\{x^{(0)} + \epsilon\, x^{(1)}(t) + \cdots\Big\}^2 = \Big\{x^{(0)} + \epsilon\, x^{(1)}(t)\Big\}^2 + \cdots \\
&= \Big(x^{(0)}\Big)^2 + 2\,\epsilon\, x^{(0)}\, x^{(1)}(t) + \epsilon^2\, \Big\{x^{(1)}(t)\Big\}^2 + \cdots\ ,
\end{aligned}$$

となり, $2\,\epsilon^2\, x^{(0)}\, x^{(2)}(t)$ が抜け落ちた間違った結果を得る. こんなことにならないか?

これらの疑問に答えるために, 丁寧に計算する. Eq.(3.16) のように展開し, $x(t) = x^{(0)} + \epsilon\, y(t)$ を Lagrangian に代入すると, $V'\big(x^{(0)}\big) = -F\big(x^{(0)}\big) = 0$ に注意して,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\, \Bigg[\, \frac{d}{dt} \Big\{x^{(0)} + \epsilon\, y(t)\Big\}\, \Bigg]^2 - V\big(x^{(0)} + \epsilon\, y(t)\big) \\
&= \epsilon^2\, \frac{m}{2}\, \dot{y}^2(t) - \Bigg[\, V\big(x^{(0)}\big) + \big(\epsilon\, y(t)\big)\, V'\big(x^{(0)}\big) + \frac{\big(\epsilon\, y(t)\big)^2}{2}\, V''\big(x^{(0)}\big) + O(\epsilon^3)\, \Bigg] \\
&= -V\big(x^{(0)}\big) + \epsilon^2\, \left(\frac{m}{2}\, \dot{y}^2(t) - \frac{k}{2}\, y^2(t)\right) + O(\epsilon^3) \qquad (3.17) \\
&= -V\big(x^{(0)}\big) + \epsilon^2\, \Bigg[\, \frac{m}{2}\, \Big\{\dot{x}^{(1)}(t) + \epsilon\, \dot{x}^{(2)}(t) + \cdots\Big\}^2 - \frac{k}{2}\, \Big\{x^{(1)}(t) + \epsilon\, x^{(2)}(t) + \cdots\Big\}^2\, \Bigg] + O(\epsilon^3) \\
&= -V\big(x^{(0)}\big) + \epsilon^2\, \Bigg[\, \frac{m}{2}\, \Big\{\dot{x}^{(1)}(t)\Big\}^2 - \frac{k}{2}\, \Big\{x^{(1)}(t)\Big\}^2\, \Bigg] + O(\epsilon^3) \\
&= -V\big(x^{(0)}\big) + \epsilon^2\, \left(\frac{m}{2}\, \dot{u}^2(t) - \frac{k}{2}\, u^2(t)\right) + O(\epsilon^3)\ , \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 以前のように $x^{(1)}(t) = u(t),\ \ k := -F'\big(x^{(0)}\big) = V''\big(x^{(0)}\big)$ と置いた.

Eq.(3.18) から分かるように,

- Lagrangian の $O(\epsilon)$ 部分は, ゼロ次の運動方程式 $V'\big(x^{(0)}\big) = -F\big(x^{(0)}\big) = 0$ によって寄与しない
- Lagrangian の $O(\epsilon^2)$ までの部分に, 2 次摂動 $x^{(2)}(t)$ は寄与しない

ことが確認され, 先の主張の正しいことが分かる.

実際の計算手続きとしては, Eq.(3.17) の段階で $y(t) \to u(t)$ とすれば良い. なぜなら, Eq.(3.17) で $y(t)$ を含む部分が既に ϵ^2 の因子をもつので, $y(t)$ を $O(\epsilon^0)$ で評価すれば良いからである.

次に, ϵ についてベキ展開した Lagrangian (3.18) から得られる Euler-Lagrange 方程式を求めよう. 質点の軌道 $x(t)$ を $O(\epsilon)$ で定めているのは $u(t)$ なので, Eq.(3.18) の $u(t)$ に関する Euler-Lagrange 方程式が, 1 次摂動の方程式を与えるはずである.

実際, ϵ 展開して得られる, 非自明かつ最低次の Euler-Lagrange 方程式は

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}(t)}\right)-\frac{\partial L}{\partial u(t)}=\epsilon^2\left(\frac{d}{dt}\Big(m\,\dot{u}(t)\Big)+k\,u(t)\right)+O(\epsilon^3)=\epsilon^2\Big(m\,\ddot{u}(t)+k\,u(t)+O(\epsilon)\Big)$$

$$\Rightarrow\quad 0=m\,\ddot{u}\,(t)+k\,u(t)\ , \tag{3.19}$$

となって, Eq.(3.10) と一致する．また, 1 次摂動 u の運動方程式を与えるものは, ϵ について展開した Lagrangian (3.18) の $O(\epsilon^2)$ の項である.[*5]

結局, 1 自由度系の安定性を Lagrangian レベルで議論するには,

(1) $x(t)$ を微小変位 ϵ の 1 次まで展開した $x(t)=x^{(0)}+\epsilon\,u(t)+\cdots$ を Lagrangian に代入
(2) Lagrangian を $L=L^{(0)}+\epsilon^2\,L^{(2)}+\cdots$ と ϵ に関して <u>2 次まで</u> ベキ展開し, $L^{(2)}$ を読み取る
(3) $L^{(2)}$ は $u(t)$ について調和振動子タイプ（正確には 2 次形式）の Lagrangian になるので, それから $u(t)$ のポテンシャルを読み取る．そしてそれが, 上に凸か or 下に凸か, を見て安定性を判断

となる.

3.3 多自由度系の例： 運動方程式経由

自由度が多い場合も, 静止解まわりの微小変位の運動を扱う手法は, 1 自由度のときと同じである．ただし, 運動を実際に解く段階で, 1 自由度の場合には現れなかった技術的な問題が生じる．現実の現象は, 多数の自由度が関与するので, この技術的問題が解決できないと安定性を議論できず困ったことになる．どのような技術的問題が生じ, いかに解決されるか, 二重振り子を例に見てみよう.

2 つの振り子を “直列” に連結したものを二重振り子という．（上にある）1 つ目の振り子は, 質量の無視できる長さ l_1 の棒と質量 m_1 の錘から構成されており, （下にある）2 つ目の振り子も同様に, 長さ l_2 の棒と質量 m_2 の錘から出来ているとする．そして, 鉛直下方から反時計回りに測った, 1 つ目の振り子の開き角を θ_1, 2 つ目の振り子のそれを θ_2 とする.

講義で示したように, 二重振り子の Lagrangian は, 全質量を $M:=m_1+m_2$ として

$$L=\left(\frac{M}{2}\,l_1^2\,\dot{\theta}_1^2+M\,g\,l_1\,\cos\theta_1\right)+\Big(\frac{m_2}{2}\,l_2^2\,\dot{\theta}_2^2+m_2\,g\,l_1\,\cos\theta_2\Big)+m_2\,l_1\,l_2\,\dot{\theta}_1\,\dot{\theta}_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)\ , \tag{3.20}$$

で与えられる．最後の項が, 2 つの振り子の相互作用の効果を表している.

また, これから導かれる Euler-Lagrange 方程式は, 次の通り：

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_1}\\&=M\,l_1^2\,\ddot{\theta}_1+M\,g\,l_1\,\sin\theta_1+m_2\,l_1\,l_2\,\Big\{\ddot{\theta}_2\,\cos(\theta_1-\theta_2)+\dot{\theta}_2^2\,\sin(\theta_1-\theta_2)\Big\}\ ,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta_2}\\&=m_2\,l_2^2\,\ddot{\theta}_2+m_2\,g\,l_2\,\sin\theta_2+m_2\,l_1\,l_2\,\Big\{\ddot{\theta}_1\,\cos(\theta_2-\theta_1)+\dot{\theta}_1^2\,\sin(\theta_2-\theta_1)\Big\}\ .\end{aligned} \tag{3.22}$$

[*5] ゼロ次の項は当然寄与しない.

Eqs.(3.21), (3.22) それぞれの中括弧の部分は, Lagrangian (3.20) の最後の項から生じており, 相互作用効果を表す．このように 2 つの振り子が相互作用していることで, 複雑な問題になっている.[*6]

一般的に解くことは不可能だとしても, 1 自由度系のように, 釣合いの位置の近くの運動であればその運動を調べることは可能だろう．そこで, 二重振り子の静止解まわりの微小変位の運動を考察し, 安定性を議論しよう．

まず, 運動方程式レベルでの考察を行う．基本レシピは 1 自由度系と変わらない．静止解を $\theta_1^{(0)}$, $\theta_2^{(0)}$ として, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ それぞれの微小変位のオーダーは等しく, ϵ としよう．このとき,

(0) 静止解 $\left(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}\right)$ を求める．静止解のとき時間微分の項はすべてゼロになることに注意して, Eqs.(3.21), (3.22) より, 4 種の静止解を得る：

$$\sin\theta_1^{(0)} = \sin\theta_2^{(0)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}\right) = (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)\ . \tag{3.23}$$

(1) $\big(\theta_1(t), \theta_2(t)\big)$ を, 静止解 $\left(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}\right)$ のまわりに ϵ の 1 次まで 展開する．

$$\theta_1(t) = \theta_1^{(0)} + \epsilon\, u_1(t) + \cdots\ , \qquad\qquad \theta_2(t) = \theta_2^{(0)} + \epsilon\, u_2(t) + \cdots\ . \tag{3.24}$$

(2) Eq.(3.24) を方程式 (3.21), (3.22), に代入し, 1. と同様, ϵ について 1 次まで 評価して u_1, u_2 の方程式を得る： このとき, $\dot\theta_1(t) = \epsilon\,\dot u_1(t)$ や $\ddot\theta_1(t) = \epsilon\,\ddot u_1(t)$ など, 一般化速度と一般化加速度が, すでに $O(\epsilon)$ の微少量であることに注意すると良い.[*7]

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon\, M\, l_1^2\, \ddot u_1(t) + \cdots + M\, g\, l_1\, \sin\left(\theta_1^{(0)} + \epsilon\, u_1(t) + \cdots\right) \\
&\qquad + m_2\, l_1\, l_2 \left\{ (\epsilon\, \ddot u_2(t) + \cdots) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cdots \right\} \\
&= \epsilon\, M\, l_1^2\, \ddot u_1(t) + \cdots + M\, g\, l_1 \left[\ \sin\theta_1^{(0)} + \left(\cos\theta_1^{(0)}\right) \epsilon\, u_1(t) + \cdots\ \right] \\
&\qquad + \epsilon\, m_2\, l_1\, l_2\, \ddot u_2(t)\, \cos\left(\theta_1^{(0)} - \theta_2^{(0)}\right) + \cdots \\
&= \epsilon \left[\ M\, l_1^2\, \ddot u_1(t) + M\, g\, l_1 \left(\cos\theta_1^{(0)}\right) u_1(t) + m_2\, l_1\, l_2 \left(\cos\theta_1^{(0)}\right)\left(\cos\theta_2^{(0)}\right) \ddot u_2(t)\ \right] \\
&\quad + \cdots\ ,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad 0 = M\, l_1^2\ \ddot u_1\,(t) + \sigma_1\, \sigma_2\, m_2\, l_1\, l_2\, \ddot u_2(t) + \sigma_1\, M\, g\, l_1\, u_1(t) \qquad \left(\sigma_i := \cos\theta_i^{(0)}\right)\ , \tag{3.25}$$

同様に,

$$0 = m_2\, l_2^2\, \ddot u_2(t) + \sigma_1\, \sigma_2\, m_2\, l_1\, l_2\, \ddot u_1(t) + \sigma_2\, m_2\, g\, l_2\, u_2(t)\ , \tag{3.26}$$

となる．Eqs.(3.25), (3.26) が, 1 次摂動 u_1, u_2 が従う方程式で, それらについて線形の微分方程式である．1 自由度系と異なるのは, u_1 と u_2 が絡み合っていて 1 個のバネの問題に帰着しない[*8] 点で, これが技術的問題を生じる．どのように解いたら良いだろうか？

[*6] 初期条件が少し異なるだけでその後の運動が全く異なる, という初期値敏感性を示す系（カオス系）として知られる．

[*7] 例えば, $\dot\theta_i^2 = O(\epsilon^2)\ \ (i = 1, 2)$ なので, $O(\epsilon)$ までの評価では $\dot\theta_i^2$ を因子に含む項は無視できる．また, $\dot\theta_i$, $\ddot\theta_i$ を因子に含む項の残りの因子は $O(\epsilon^0)$ まで評価すれば良い．例えば,
$\dot\theta_2\ \cos(\theta_2 - \theta_1) = \epsilon\, \dot u_2\ \cos(\theta_2 - \theta_1) + O(\epsilon^2) = \epsilon\, \dot u_2\ \cos(\theta_2^{(0)} - \theta_1^{(0)}) + O(\epsilon^2)$ などである．

[*8] 2 式それぞれの真ん中の項がなければ, それぞれ 1 個のバネの問題に帰着する．

準備として, これら 2 式 (3.25), (3.26) を行列形式にまとめると,

$$0 = \begin{pmatrix} M\,l_1^2 & \sigma_1\,\sigma_2\,m_2\,l_1\,l_2 \\ \sigma_1\,\sigma_2\,m_2\,l_1\,l_2 & m_2\,l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1\,M\,g\,l_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2\,m_2\,g\,l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$= \boldsymbol{M}\,\frac{d^2}{dt^2}\,\vec{u}(t) + \boldsymbol{K}\,\vec{u}(t)\ , \tag{3.28}$$

となる. ここで, $\rho := m_1/m_2$, $\gamma := l_1/l_2$ として,

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} M\,l_1^2 & \sigma_1\,\sigma_2\,m_2\,l_1\,l_2 \\ \sigma_1\,\sigma_2\,m_2\,l_1\,l_2 & m_2\,l_2^2 \end{pmatrix} = m_2\,l_1\,l_2 \begin{pmatrix} (1+\rho)\,\gamma & \sigma_1\,\sigma_2 \\ \sigma_1\,\sigma_2 & 1/\gamma \end{pmatrix}\ , \tag{3.29}$$

$$\boldsymbol{K} := \begin{pmatrix} \sigma_1\,M\,g\,l_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2\,m_2\,g\,l_2 \end{pmatrix} = m_2\,g\,l_2 \begin{pmatrix} \sigma_1\,(1+\rho)\,\gamma & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\ , \tag{3.30}$$

$$\vec{u}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}\ , \tag{3.31}$$

と定義した. 2 つの振り子が絡んでいる効果が, 行列 $\boldsymbol{M}$ の非対角成分に現れている. また, どの静止解まわりで微小変位を考えているかが, 行列 $\boldsymbol{K}$ の σ_1, σ_2 に反映されている. このように, 行列 $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{K}$ の具体形に, 系のもつダイナミクスや考えている静止解の特徴が反映されている.

これまで, 2 自由度系である二重振り子を例に, 静止解まわりの微小変位が従う方程式を求めたが, なされた計算を辿れば分かるように, 一般の f 自由度系の場合も, その微小変位が従う方程式は Eq.(3.28) の形にまとめられる. 自由度が f であるため, 行列 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ が $f \times f$ 行列に, $\vec{u}(t)$ が f 次元ベクトルになるところが, 異なるだけである. 「自由度間の絡み合いの効果が, 行列 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{K}$ の非対角成分に現れる」ことは変らない.

1 自由度系の微小変位が従う方程式 (3.10) と Eq.(3.28) を比べれば, 両者の共通性は一目瞭然である. 解ける気がする. しかし, 実際に解こうとして "内訳" を見ると（成分ごとに見ると）, 絡まっていて解ける気が失せる. "諸悪の根源" は, 行列 $\boldsymbol{M}$ の非対角成分の存在にある（一般には $\boldsymbol{K}$ にも存在する）. これら行列の非対角成分を消す手立てはないか ...

3.3.1 基準座標

手立てはある. それは, 線形代数で学んだ『行列の対角化』だ. 具体的に見るために, Eq.(3.28) を

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{u}(t) + \boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{u}(t)\ , \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^2 := \boldsymbol{M}^{-1}\,\boldsymbol{K} = \frac{g}{l_1}\,\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \sigma_1\,(1+\rho) & -\sigma_1 \\ -\sigma_2\,\gamma\,(1+\rho) & \sigma_2\,\gamma\,(1+\rho) \end{pmatrix}\ , \tag{3.33}$$

と整理する. ここで, $\boldsymbol{M}^{-1}\,\boldsymbol{K}$ を行列 $\boldsymbol{\Omega}$ の二乗としたが, 特に意味はない. 1 自由度調和振動子の運動方程式 $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ に似せたかっただけである. 気に入らなければ, $\boldsymbol{\Omega}^2$ の代わりに $\boldsymbol{A}$ とでもすれば良い. ともかく, 2 つの振り子の絡み合いは, 行列 $\boldsymbol{\Omega}^2$（または $\boldsymbol{A}$）の非対角成分の存在として現れている.

『行列の対角化』によって, この非対角成分が消せる（絡み合いが解ける）ことを見よう. まず, 変数 $\vec{u}(t)$ を別の変数 $\vec{v}(t)$ に替えたとき, 何が起こるか調べよう. $\vec{u}(t)$ と $\vec{v}(t)$ の関係は様々あり得るが, ここ

では具体的に線形関係にあるとする[*9]：

$$
\begin{cases} u_1(t) =: a\,v_1(t) + b\,v_2(t) \\ u_2(t) =: c\,v_1(t) + d\,v_2(t) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}
$$

$$
\Longleftrightarrow \qquad \vec{u}(t) =: \boldsymbol{T}\,\vec{v}(t)\ . \tag{3.34}
$$

ここで, a, b, c, d は任意だが, 「変換行列 $\boldsymbol{T}$ は正則行列（逆行列が存在)」という条件付きである.[*10]

$\vec{u}(t)$ の方程式 (3.32) を, $\vec{v}(t)$ のものに書き換えると, 次のようになる：

$$
0 = \frac{d^2}{dt^2}\,\vec{v}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}\ \vec{v}(t)\ . \tag{3.35}
$$

ここでもし, $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ が対角行列となれば, $v_1(t)$ と $v_2(t)$ は絡み合わず, 独立な 2 つの調和振動子の問題となる. つまり, $u_1(t)$ と $u_2(t)$ の間にあった絡み合いが, 変換 (3.34) によって解けたことになる.

では, 任意の行列 $\boldsymbol{\Omega}^2$ に対し, $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ が対角行列となるような変換行列 $\boldsymbol{T}$ が存在するだろうか？存在するとして見つけられるだろうか？　答えは Yes[*11] で, その手続きが『行列の対角化』である.

対角化の手続きは後回しにして, 結果を認めたとして何が分かるか先に進もう. 変換行列 $\boldsymbol{T}$ を巧く選ぶことで, 次のように書けたとする：

$$
\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\ . \tag{3.36}
$$

ここで, λ_1, λ_2 は一般に複素数である. （もし, 正の実数であれば, ω_1^2, ω_2^2 としたいところ.）しかし, 今の問題の場合に λ_1, λ_2 を求めると実数になることが分かるので, 以下では λ_1, λ_2 を実数と仮定する.

このとき, $\vec{v}(t)$ の方程式 (3.35) を成分表記すると, 次のように独立した方程式となる：

$$
0 = \ddot{v}_1(t) + \lambda_1\,v_1(t)\ , \qquad\qquad 0 = \ddot{v}_2(t) + \lambda_2\,v_2(t)\ . \tag{3.37}
$$

絡み合った運動が, 変換 (3.34) によって $v_1(t)$, $v_2(t)$ の独立な運動になった. そこで, これらに名前を付け, $v_1(t)$, $v_2(t)$ を**基準座標**と呼ぶ. Eq.(3.37) の一般解は, A_i, B_i $(i = 1, 2)$ を定数として

$$
v_1(t) = A_1\,e^{-i\sqrt{\lambda_1}\,t} + B_1\,e^{i\sqrt{\lambda_1}\,t}\ , \qquad\qquad v_2(t) = A_2\,e^{-i\sqrt{\lambda_2}\,t} + B_1\,e^{i\sqrt{\lambda_2}\,t}\ , \tag{3.38}
$$

で与えられるので, 解の振る舞いは

- $\lambda_i > 0 \quad \Rightarrow \quad v_i(t)$ は角振動数 $\sqrt{\lambda_i}$ で振動する.
- $\lambda_i < 0 \quad \Rightarrow \quad v_i(t)$ は指数的に変化する.

となる.

これより, 二重振り子の静止解の安定性は, 「λ_1, λ_2 が**ともに**正のとき静止解は安定」, 「一つでも負の λ_i が存在すれば静止解は不安定」となることが分かる.

[*9] 後の記法を便利にするために, 旧い変数 $\vec{u}(t)$ を新しい変数 $\vec{v}(t)$ で表す形で新変数を導入した. 気に入らなければ, $\vec{v}(t)$ を $\vec{u}(t)$ で表す素直な形で新変数を導入しても良い.

[*10] 逆行列が存在しなかったらどうなるか考えてみよ. 例えば, $\boldsymbol{T} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ としたらどうなるか？

[*11] 正確には, 「任意の正方行列 $\boldsymbol{A}$ は, 相似変形 $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{T}$ によって Jordan 標準形にできる（ブロック対角化できる)」である. だから, （本当の意味で）任意の $\boldsymbol{\Omega}^2$ を完全に対角化できる保証はないが, 今考えている問題の範囲における $\boldsymbol{\Omega}^2$ にはもう少し制限が付くので, ブロック対角化に留まらず, 完全に対角化できる.

一般の f 自由度系の安定性も同様に理解できることが分かるだろう．

> 『行列の対角化』によって, 絡み合った問題が f 個の独立な 1 自由度系の微小変位の問題に帰着する．そして, 対角化で得られる行列 $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ の対角成分 $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\cdots,\,\lambda_f$ の符合が静止解の安定性を決める：**すべての** λ_i が正のとき静止解は安定となり, 一つでも負の λ_i が存在すれば, 静止解は不安定となる．

独立な $v_1(t)$ と $v_2(t)$ の運動は分かり易いが, これらは方程式 (3.32) を解くために導入された "便宜的な" 変数であり, 本来興味があるのは, $u_1(t)$, $u_2(t)$ である．基準座標に（独立して運動するという）特別の意味があっても, その運動が $u_1(t)$, $u_2(t)$ にどう反映されるのか分からなければ意味がない．

$u_1(t)$, $u_2(t)$ の運動は, Eq.(3.34) から容易に知れる．特に, 次のように表すと意味がはっきりする：

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= \boldsymbol{T}\begin{pmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\left(v_1(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+v_2(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = v_1(t)\,\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+v_2(t)\,\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ &= v_1(t)\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+v_2(t)\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\ .\end{aligned}\tag{3.39}$$

これは, $\vec{u}(t)$ の運動は, 基準座標の線形和（線形重ね合わせ）で書けることを示している．「任意のベクトルは基底ベクトルの線形和で書ける」ことと対比させると, 基準座標は基底ベクトルの役割を果たすことが分かる．よって, 基準座標は, Eq.(3.32) を解くために導入された "便宜的な" 変数というよりむしろ, より基本的なものである．

基準座標の運動を, $u_1(t)$, $u_2(t)$ を通して具体的に見てみよう．基準座標 $v_1(t)$, $v_2(t)$ は独立に動けるので, $v_1(t)$ のみが運動する $(v_2(t)=0)$ ことや, $v_2(t)$ のみが運動する $(v_1(t)=0)$ ことが可能である．

- $v_1(t)$ のみが運動

$$\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix} = v_1(t)\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} \qquad\Rightarrow\qquad u_1(t):u_2(t)=a:c\ .\tag{3.40}$$

- $v_2(t)$ のみが運動

$$\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix} = v_2(t)\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \qquad\Rightarrow\qquad u_1(t):u_2(t)=b:d\ .\tag{3.41}$$

このように, 基準座標の運動は, $u_1(t)$ と $u_2(t)$ に共通の時間依存性をもたらし, "パターン" $(u_1(t):u_2(t))$ が一定となる運動であることが分かる．また, これにより変換行列 $\boldsymbol{T}$ の意味「$\boldsymbol{T}$ を構成する各列は, 基準座標の運動 "パターン" を表す」が明らかになった：

$$\boldsymbol{T}=\left(\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{21}\\\vdots\\\vdots\\t_{f1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{12}\\t_{22}\\\vdots\\\vdots\\t_{f2}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}t_{1j}\\t_{2j}\\\vdots\\\vdots\\t_{fj}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}t_{1f}\\t_{2f}\\\vdots\\\vdots\\t_{ff}\end{bmatrix}\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}\lambda_j\ \text{と結び付く}\\\text{基準振動}\ u_j(t)\\\text{の運動パターン}\end{matrix}\qquad u_j(t)\propto\begin{bmatrix}t_{1j}\\t_{2j}\\\vdots\\\vdots\\t_{fj}\end{bmatrix}\tag{3.42}$$

基準座標の意味は分かった．よって, 基準座標をもちいて $\vec{u}(t)$ を表す Eq.(3.39) は, 物理的意味がはっきりした表現である．

一方, 運動方程式は, 現在の情報から未来（過去）を予言（遡言）する能力を与えているのだから, その解 $\vec{u}(t)$ を, 初期値 $\vec{u}(0)$, $\dot{\vec{u}}(0)$ で表すことも重要である. そのためにまず, Eq.(3.38) のように表された $v_1(t)$, $v_2(t)$ を, 初期値 $v_1(0)$, $v_2(0)$, $\dot{v}_1(0)$, $\dot{v}_2(0)$ で表すと,

$$v_1(t) = h_1(t)\, v_1(0) + g_1(t)\, \dot{v}_1(0) \ , \qquad v_2(t) = h_2(t)\, v_2(0) + g_2(t)\, \dot{v}_2(0) \ , \tag{3.43}$$

となる. ここで,

$$g_i(t) := \frac{e^{i\sqrt{\lambda_i}\, t} - e^{-i\sqrt{\lambda_i}\, t}}{2\, i\sqrt{\lambda_i}} \qquad (i = 1, 2) \ , \tag{3.44}$$

$$h_i(t) := \frac{e^{i\sqrt{\lambda_i}\, t} + e^{-i\sqrt{\lambda_i}\, t}}{2} = \frac{d}{dt}\, g_i(t) \qquad (i = 1, 2) \ , \tag{3.45}$$

とした. Eq.(3.43) を行列形式で表すと便利である.

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 \\ 0 & g_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1(0) \\ \dot{v}_2(0) \end{pmatrix} \ . \tag{3.46}$$

これから, 初期値で $\vec{u}(t)$ を表す形式が, 容易に得られる：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} + \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 \\ 0 & g_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_1(0) \\ \dot{v}_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 \\ 0 & g_2(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}(t) = \boldsymbol{H}(t)\, \vec{u}(0) + \boldsymbol{G}(t)\, \dot{\vec{u}}(0) \ , \tag{3.48}$$

$$\boldsymbol{G}(t) := \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 \\ 0 & g_2(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} \ , \tag{3.49}$$

$$\boldsymbol{H}(t) := \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{G}(t) \ . \tag{3.50}$$

一般の f 自由度系の微小変位の解も, Eq.(3.48) と同じ形に表せることも分かるだろう. 今扱っている二重振り子の場合との違いは, $\vec{u}(t)$, $\vec{u}(0)$, $\dot{\vec{u}}(0)$ が f 次元ベクトルであること, ならびに, 行列 $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{G}(t)$, $\boldsymbol{H}(t)$ が $f \times f$ 行列で,

$$\boldsymbol{G}(t) := \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_f(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} \ , \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{H}(t) := \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_f(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{d}{dt}\, \boldsymbol{G}(t) \ , \tag{3.52}$$

となることである.

このように, 線形（微分）方程式を行列形式で扱うことは, 効率よく計算ができ, 性質を読み取ることも容易であることが分かる.

3.3.2　行列の対角化

これまで, $\boldsymbol{\Omega}^2$ が相似変形 $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ によって対角化できたとして話を進め, 静止解の安定性と微小変位の運動について知見を得た．対角行列 $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ の対角成分と変換行列 $\boldsymbol{T}$ に情報が詰まっている．ここでは, 実際に $\boldsymbol{\Omega}^2$ を対角化する方法（変換行列 $\boldsymbol{T}$ を見つける方法）を考察しよう.*12

変換行列 $\boldsymbol{T}$ を見つけることと, 基準座標 $\vec{v}(t)$ を見つけることは同じことである．(See, Eq.(3.34).) 基準座標 $\vec{v}(t)$ を見つけるヒントは, 前節 Eq.(3.41) の下にあるコメント「基準座標の運動は, $u_1(t)$ と $u_2(t)$ に共通の時間依存性をもたらし, “パターン”（$u_1(t) : u_2(t)$) が一定となる運動」にある.

コメントの内容を要約すれば, 「基準座標の運動は**変数分離形**で表せる」, すなわち,

$$\vec{u}(t) = T(t)\,\vec{\xi} \tag{3.53}$$

と表せる, ということである．$T(t)$ が「共通の時間依存性」を, 定ベクトル $\vec{\xi}$ が「“パターン”」を表現している．このように, 変数分離形の解を探すことは, 実は基準座標を見つけること, そして, 行列の対角化と結び付いている.*13

$T(t)$ と $\vec{\xi}$ の性質は, 当然 $\vec{u}(t)$ が従う運動方程式 (3.32) から与えられるので, Eq.(3.53) を方程式に代入する．$\vec{\xi}$ は定ベクトルなので,

$$0 = \ddot{T}(t)\,\vec{\xi} + T(t)\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}\,\vec{\xi}\,, \tag{3.54}$$

を得る．Eq.(3.54) 最後の式の左辺は時間依存しないので, 右辺もそうでなければならない．これは, $\ddot{T}(t)/T(t)$ が定数であることを示す．この定数を $-\lambda$ とすると, 結局, Eq.(3.54) は 2 つの情報を与える：

$$0 = \ddot{T}(t) + \lambda\,T(t)\;, \tag{3.55}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi} = \lambda\,\vec{\xi}\;. \tag{3.56}$$

Eq.(3.56) は, 行列 $\boldsymbol{\Omega}^2$ の固有値方程式に他ならない．つまり, λ と $\vec{\xi}$ は, $\boldsymbol{\Omega}^2$ の固有値と固有ベクトルである．よって, 固有値方程式 (3.56) を解けば, λ と $\vec{\xi}$ が（対で）分かる．二重振り子の場合, $\boldsymbol{\Omega}^2$ は 2×2 行列なので, その固有値と固有ベクトルは 2 対ある．それらを $(\lambda_1, \vec{\xi}_1)$, $(\lambda_2, \vec{\xi}_2)$ とする.

λ が分かったので, Eq.(3.55) を解けば $T(t)$ が得られる．固有値 λ の 2 つの値 λ_1, λ_2 に対応して $T(t)$ も 2 つあり, それらを $T_1(t)$, $T_2(t)$ とする.

このように, 基準振動を見つける作業は, 行列 $\boldsymbol{\Omega}^2$ の固有値問題を解くことに帰着された．そして, その固有値 λ_i と固有ベクトル $\vec{\xi}_i$ の意味は, Eq.(3.53) を Eqs.(3.40), (3.41) と見比べれば自ずと分かる：

$$T_i(t) \leftrightarrow v_i(t) \tag{3.57}$$

$$\vec{\xi}_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\;, \qquad \vec{\xi}_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\;. \tag{3.58}$$

λ_i は, Eq.(3.55) を Eq.(3.37) と比べれば分かるように, Eq.(3.36) の右辺に登場する対角行列 $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ の対角成分に他ならない.

上記の観察は, $f\times f$ 行列 $\boldsymbol{\Omega}^2$ の対角化法を教えている．その手続きは,

---

*12　線形代数の教科書を見れば載っている事であるが, 少し回り道をしてみる.

*13 物理数学 I で, 数珠玉の運動方程式を解くために, 変数分離形の解を探し, それらを基準振動と呼んだ．これはまさに, ここで言うところの基準座標を見つけていたことに他ならない.

(1) $\boldsymbol{\Omega}^2$ の固有値方程式 $\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi}=\lambda\,\vec{\xi}$ を解き, f 対の固有値, 固有ベクトル $(\lambda_i,\vec{\xi}_i)_{i=1,2,\cdots,f}$ を入手する.

(2) 得られた f 個の固有ベクトル（縦ベクトル）を横に並べ, $f\times f$ 行列 $\boldsymbol{T}$ をつくる：

$$\boldsymbol{T}=\left(\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_1 \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_2 \\ \\ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_f \\ \\ \end{bmatrix}\right)\ . \tag{3.59}$$

(3) $\boldsymbol{T}$ が正則行列（逆行列が存在）であれば, それをもちいた相似変形 $\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}$ が対角行列になる：

$$\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_f\end{pmatrix}\ . \tag{3.60}$$

以上である.

実際に, Eq.(3.59) で与えられる $\boldsymbol{T}$ が Eq.(3.60) を満たすことを確認するには, $\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi}_1=\lambda_1\,\vec{\xi}_1$, $\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi}_2=\lambda_2\,\vec{\xi}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi}_f=\lambda_f\,\vec{\xi}_f$ を横に並べた式が, 一般に

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^2\left(\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_1 \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_2 \\ \\ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_f \\ \\ \end{bmatrix}\right)&=\left(\begin{bmatrix} \\ \lambda_1\,\vec{\xi}_1 \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \lambda_2\,\vec{\xi}_2 \\ \\ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \\ \lambda_f\,\vec{\xi}_f \\ \\ \end{bmatrix}\right)\\ &=\left(\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_1 \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_2 \\ \\ \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \\ \vec{\xi}_f \\ \\ \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_f\end{pmatrix}\ ,\end{aligned} \tag{3.61}$$

と表せることに気付けば良い.

それでは, $\boldsymbol{\Omega}^2$ の対角化を行ってみよう. $\boldsymbol{\Omega}^2$ は Eq.(3.33) で与えられているが, その対角化は,

$$\boldsymbol{W}:=\begin{pmatrix}\sigma_1\,(1+\rho) & -\sigma_1\\ -\sigma_2\,\gamma\,(1+\rho) & \sigma_2\,\gamma\,(1+\rho)\end{pmatrix}=\frac{l_1\,\rho}{g}\,\boldsymbol{\Omega}^2\ ,$$

のそれと同じである. ここで, $\rho:=m_1/m_2>0$, $\gamma:=l_1/l_2>0$, $\sigma_i:=\cos\theta_i^{(0)}$ $(i=1,2)$ である. なお, Eq.(3.23) で求めたように, 静止解は $\theta_i^{(0)}=0,\pi$ のどちらかなので, $\sigma_i=1$ (for $\theta_i^{(0)}=0$), もしくは, $\sigma_i=-1$ (for $\theta_i^{(0)}=\pi$) である.

行列 $\boldsymbol{W}$ の固有値方程式を $\boldsymbol{W}\,\vec{\xi}=\hat{\lambda}\,\vec{\xi}$ とすると, $\boldsymbol{\Omega}^2\,\vec{\xi}=\dfrac{g}{l_1\,\rho}\,\hat{\lambda}\,\vec{\xi}$ となる. よって, $\boldsymbol{\Omega}^2$ の固有値 λ は, $\lambda=\dfrac{g}{l_1\,\rho}\,\hat{\lambda}$ の関係にあり, 同符号となることに注意する.

それでは, 固有値方程式を解こう. 単位行列を $\mathbf{1}$ として,

$$0=\big(\boldsymbol{W}-\hat{\lambda}\,\mathbf{1}\big)\,\vec{\xi}\qquad\Longrightarrow\qquad 0=\det\big(\boldsymbol{W}-\hat{\lambda}\,\mathbf{1}\big)=\hat{\lambda}^2-(\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{W})\,\hat{\lambda}+\det\boldsymbol{W}\ , \tag{3.62}$$

を得る．行列式の展開では, 2×2 行列であることを利用した．

さて, $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{W}=(1+\rho)(\sigma_1+\sigma_2\,\gamma)$, $\det\boldsymbol{W}=\sigma_1\,\sigma_2\,\gamma\,\rho\,(1+\rho)$ より, 2 次方程式 (3.62) の判別式が

$$D=(1+\rho)\left[\ (\sigma_1+\sigma_2\,\gamma)^2+\rho\,(\sigma_1-\sigma_2\,\gamma)^2\ \right]>0\ ,$$

となるので, Eq.(3.62) の解は実数である．よって, 固有値 $\hat{\lambda}$, λ は実数となる．

静止解が安定となるのは, $\lambda_1,\lambda_2>0$, つまり, $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2>0$ のときである．2 次方程式 (3.62) の 2 つの実解がともに正となる条件は,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{W}=(1+\rho)(\sigma_1+\sigma_2\,\gamma)>0 \quad \text{かつ} \quad \det\boldsymbol{W}=\sigma_1\,\sigma_2\,\gamma\,\rho\,(1+\rho)>0\\
\Longleftrightarrow\ \ &\sigma_1+\sigma_2\,\gamma>0 \quad \text{かつ} \quad \sigma_1\,\sigma_2>0\\
\Longleftrightarrow\ \ &\sigma_1=\sigma_2=1 \quad \text{すなわち} \quad \left(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)}\right)=(0,0)\ ,
\end{aligned}\tag{3.63}$$

となり, 2 つの振り子が, “ともに下に垂れている” 静止解のみが安定で, それ以外は不安定であることが分かる．（直感的には明らかであるが.）

この安定静止解 $\left(\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)}\right)=(0,0)$ の場合に, 固有値と固有ベクトルを具体的に見てみよう．いまの問題の場合, 2 対の固有値・固有ベクトルの識別を, 添字 $1,2$ で行うよりも $+,-$ の添字で行った方が便利なので, 固有値・固有ベクトルを, $\hat{\lambda}_\pm$, $\vec{\xi}_\pm$ とする．

さらに, 簡単にするために, 2 つの振り子の長さが等しい場合 $\gamma=l_1/l_2=1$ を考えることにする．このとき, その固有値は, Eq.(3.62) を解いて,

$$\hat{\lambda}_\pm=1+\rho\pm\sqrt{1+\rho}\ ,\tag{3.64}$$

で与えられる．$\hat{\lambda}_+>\hat{\lambda}_->0$ である．

固有ベクトルは, その成分を $\vec{\xi}_\pm={}^t(\alpha_\pm,\beta_\pm)$ として,

$$0=\begin{pmatrix}1+\rho-\hat{\lambda}_\pm & -1\\ -\gamma\,(1+\rho) & \gamma\,(1+\rho)-\hat{\lambda}_\pm\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_\pm\\ \beta_\pm\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta_\pm=\left(1+\rho-\hat{\lambda}_\pm\right)\alpha_\pm$$

より,

$$\vec{\xi}_\pm=\begin{pmatrix}\alpha_\pm\\ \beta_\pm\end{pmatrix}=C_\pm\begin{pmatrix}1\\ \mp\sqrt{1+\rho}\end{pmatrix}\ ,\tag{3.65}$$

となる．比例定数 $C_\pm$ は任意なので, $C_\pm=1$ とでもすれば良い．

変換行列 $\boldsymbol{T}$ は, $\vec{\xi}_-$ と $\vec{\xi}_+$ を横に並べ,

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \sqrt{1+\rho} & -\sqrt{1+\rho}\end{pmatrix}\ ,\tag{3.66}$$

で与えられる．そして,

$$\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}1+\rho & -1\\ -(1+\rho) & 1+\rho\end{pmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\hat{\lambda}_- & 0\\ 0 & \hat{\lambda}_+\end{pmatrix}\ ,\tag{3.67}$$

を満たす.[*14]

[*14] 変換行列 $\boldsymbol{T}$ の具体形 (3.66) は, $C_-=C_+=1$ とした場合に相当する．一般の係数 $C_\pm$ で変換行列をつくった場合でも Eq.(3.67) が満たされるか気になるが, ちゃんと上手く行く．これを具体的に確かめてみよ．

結局, 長さが等しい ($l_1 = l_2 = l$) 二重振り子の安定静止解まわりの微小振動は, 角振動数 $\omega_\pm = \sqrt{\lambda_\pm}$ (See, Eq.(3.38)) の 2 つの基準振動

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{1+\rho-\sqrt{1+\rho}}{\rho}}\ , \qquad \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+\rho} \end{pmatrix}\ , \tag{3.68}$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{1+\rho+\sqrt{1+\rho}}{\rho}}\ , \qquad \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{1+\rho} \end{pmatrix}\ , \tag{3.69}$$

の線形和で与えられる.

Eq.(3.68) から明らかなように, ゆっくりした基準振動 (ω_-) の場合, 2 つの振り子は同じ方向に振れることが分かる. 一方, 速い基準振動 (ω_+) は, 2 つの振り子が逆方向に振れ, "ガチャガチャ" しながら "素早く" 運動することが分かる.

3.3.3 まとめ

少し話が錯綜したので, ここまでを「$\vec{u}(t)$ の運動方程式 (3.32) を解く」という筋でまとめる.
f 次元ベクトル $\vec{u}(t)$ が $0 = \ddot{\vec{u}}(t) + \mathbf{\Omega}^2\,\vec{u}(t)$ を満たすとき, この一般解を求めたい. その手続きは,

(1) 基準座標を見つけるため, 変数分離形 $\vec{u}(t) = v(t)\,\vec{\xi}$ を仮定する. ($\vec{\xi}$ は定ベクトルである.)

(2) 変数分離形の解に対し, 運動方程式が次式にまとまることを確認する.

$$0 = \ddot{v}(t)\,\vec{\xi} + v(t)\,\mathbf{\Omega}^2\,\vec{\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Omega}^2\,\vec{\xi} = -\frac{\ddot{v}(t)}{v(t)}\,\vec{\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = \ddot{v}(t) + \lambda\,v(t) \\ \mathbf{\Omega}^2\,\vec{\xi} = \lambda\,\vec{\xi} \end{cases} . \tag{3.70}$$

(3) $\mathbf{\Omega}^2$ の固有値方程式 $\mathbf{\Omega}^2\,\vec{\xi} = \lambda\,\vec{\xi}$ を解き, f 対の固有値, 固有ベクトルの組 $(\lambda_i, \vec{\xi}_i)_{i=1,2,\cdots,f}$ を入手する.

(4) 各固有値 λ_i に対応する $v_i(t)$ が従う方程式 $0 = \ddot{v}_i(t) + \lambda_i\,v_i(t)$ を解き, $v_i(t)$ の一般解を得る.

$$\begin{aligned} v_i(t) &= A_i\,e^{-i\sqrt{\lambda_i}\ t} + B_i\,e^{i\sqrt{\lambda_i}\ t} \\ \text{or} \qquad &= h_i(t)\,v_i(0) + g_i(t)\,\dot{v}_i(0)\ . \end{aligned}$$

ここで,

$$g_i(t) := \frac{e^{i\sqrt{\lambda_i}\,t} - e^{-i\sqrt{\lambda_i}\,t}}{2\,i\,\sqrt{\lambda_i}}\ , \qquad h_i(t) := \frac{e^{i\sqrt{\lambda_i}\,t} + e^{-i\sqrt{\lambda_i}\,t}}{2} = \frac{d}{dt}\,g_i(t)\ .$$

(5) f 個の変数分離形の特解 $v_i(t)\,\vec{\xi}_i$ を重ね合わせて, 一般解をつくる.

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) = \sum_{i=1}^{f} v_i(t)\,\vec{\xi}_i &= \sum_{i=1}^{f}\left(A_i\,e^{-i\sqrt{\lambda_i}\ t} + B_i\,e^{i\sqrt{\lambda_i}\ t}\right)\vec{\xi}_i \\ \text{or} \qquad &= \sum_{i=1}^{f}\Big(h_i(t)\,v_i(0) + g_i(t)\,\dot{v}_i(0)\Big)\vec{\xi}_i\ . \end{aligned}$$

特解を重ね合わせるとき, 適当な係数 C_i で重みを付けて $\sum_{i=1}^{f} C_i\,v_i(t)\,\vec{\xi}_i$ とすべきだと思うかも知れない. 実際それは正しい. しかし, C_i の効果は, A_i, B_i や $v_i(0)$, $\dot{v}_i(0)$ に吸収できるので, はじめから $C_i = 1$ とした重ねあわせで十分である. (「吸収できる」とは次の意味: 重み C_i を付けると, 結局 $C_i\,A_i$, $C_i\,B_i$ などが現れる. しかし, そもそも A_i, B_i などは単なる係数なので, $C_i\,A_i$ などを改めて A_i と書くことにすれば, $C_i = 1$ とした重ね合わせと同じである.)

(6) 係数 A_i, B_i or $v_i(0)$, $\dot{v}_i(0)$ に, 初期値 $u_i(0)$, $\dot{u}_i(0)$ を反映させる. つまり,

$$\begin{aligned}
\vec{u}(0) &= \sum_{i=1}^{f} (A_i + B_i)\,\vec{\xi}_i \\
\text{or} \qquad &= \sum_{i=1}^{f} \Big(h_i(0)\,v_i(0) + g_i(0)\,\dot{v}_i(0)\Big)\,\vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{f} v_i(0)\,\vec{\xi}_i \ ,
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{u}}(0) &= \sum_{i=1}^{f} \sqrt{\lambda_i}\,(-A_i + B_i)\,\vec{\xi}_i \\
\text{or} \qquad &= \sum_{i=1}^{f} \Big(\dot{h}_i(0)\,v_i(0) + \dot{g}_i(0)\,\dot{v}_i(0)\Big)\,\vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^{f} \dot{v}_i(0)\,\vec{\xi}_i \ ,
\end{aligned}$$

を解いて, (A_i, B_i) or $\big(v_i(0), \dot{v}_i(0)\big)$ を $\big(u_i(0),\, \dot{u}_i(0)\big)$ で表す.

以上である.

「基準座標を求め, それらの重ね合わせで $\vec{u}(t)$ を理解する」という手続きの (5) までは, 行列 $\mathbf{\Omega}^2$ の対角化は表立って現れない. （とは言え, (3) の段階で, 対角化に必要な操作を実質的に実行しているが.）手続きの (6) の段階ではじめて, 行列 $\mathbf{\Omega}^2$ の対角化（に必要な変換行列 $\boldsymbol{T}$）が現れる.

「絡み合った運動方程式 (3.32) を独立に運動する基準座標に変換し, Eqs.(3.35), (3.36) を解く」という立場では, 出発点で行列の対角化が必要となる.

一方, 上記の手続きに従って, 「機械的に運動方程式を解く」という目標に向かう場合, 行列の対角化は最後に現れる.[*15] それまでの段階で, 基準座標という, 物理的に重要な情報が手に入っているので, 最後の手続き (6) は些末な事にも思える. 行列の対角化は “つまらない技術的な事” なのだろうか？

3.4 多自由度系の例： Lagrangian 経由

古典力学は, 基本的に運動方程式を扱う. 方程式を扱う上で非常に便利な方法として, Lagrange 形式や（これから学ぶ）Hamilton 形式（正準形式）がある. もちろん, これらの形式は概念的に新たな視点をもたらす興味深いものであるが, Lagrangian や Hamiltonian がなくても, 運動方程式によって系の特徴付けが十分なされている.

20 世紀に入って明らかになったことは, 「古典力学の枠組みは非常に強力ではあるが, あくまでも近似的なものであって, その背後に, より基本的な量子力学という新しい枠組みがある」ということである. そして, 量子力学の枠組みでは, 運動方程式よりも, Lagrangian や Hamiltonian[*16] が基本的な役割を果たす. そこで, 微小変位の運動の理解を, 運動方程式レベルだけでなく, Lagrangian や Hamiltonian のレベルで行うことは重要である.[*17]

また, そう難しそうなことを言わずとも, 古典力学の範囲で Lagrangian や Hamiltonian のレベルで微小変位の取り扱いを整備しておくことは, 安定性の理解を容易にしてくれる.

[*15] (A_i, B_i) or $\big(v_i(0), \dot{v}_i(0)\big)$ を $\big(u_i(0),\, \dot{u}_i(0)\big)$ で表す際に $\boldsymbol{T}$ が現れることを, 二重振り子の場合に確かめてみよ.

[*16] 大雑把に言えば, エネルギーのこと.

[*17] さらに言うと, 馴染み深い「粒子」の概念は近似的なものである. その背後に, より基本的な「場」がある. 「粒子」とは, 「場」の微小変位の “基準座標” として理解されている.

1 自由度系の静止解の安定性は, 静止解近傍のポテンシャルが「上に凸か」 or 「下に凸か」で判断できる, というはっきりとしたイメージがあった. 二重振り子の微小変位が従う方程式 (3.27) を見ると, 自由度の絡み合いが加速度にあるので, 簡単なイメージをもてそうにない. しかし, Eq.(3.32) のように整理し, さらに基準座標 $\vec{v}(t)$ を導入すると, それが従う方程式 (3.35), (3.36) は, 単純な, 2 つの独立な調和振動子の方程式になっていた. ここまで来れば, 二重振り子の安定性も, 1 自由度系と同様に, ポテンシャルの言葉で直感的に理解できそうである.

ポテンシャルは運動方程式にも（微分の形で）登場するが, Lagrangian や Hamiltonian には直接登場する. よって, Lagrangian や Hamiltonian レベルでの微小変位の議論を整備しておけば, 自ずと安定性の理解を直感的に把握できるようにしてくれそうである.

そこで, この節では, Lagrangian レベルでの微小変位の議論を整備する. . . . .