物理学で宇宙を測る

～ 次元解析入門 ～

岡村 隆　　　関西学院大学・理工

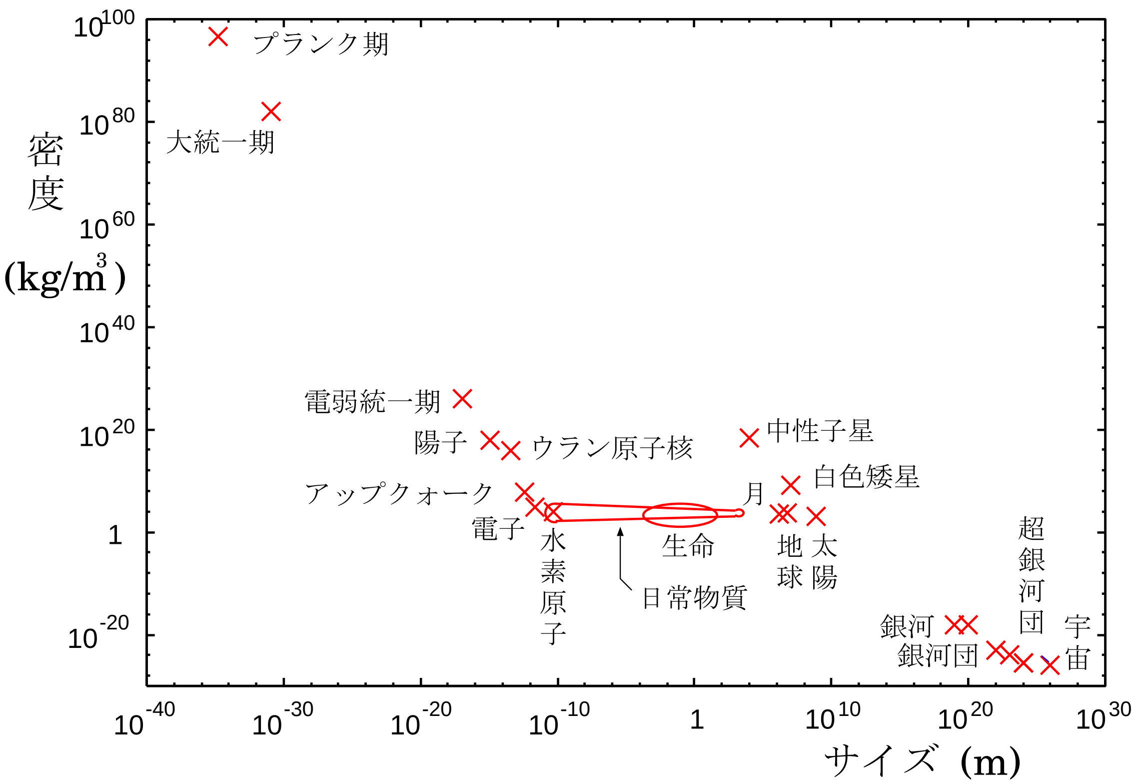
関学オープンラボ 2007 年 8 月 4 日

1　自然界の構造

我々の身の回りには様々な構造物がある．学校の建物や携帯電話といった建築物や工業製品だけでなく，我々自身，人間といった生物も構造物である．自然の風景 — 砂漠の風紋，山脈や雲など — もそうだし，月や太陽，銀河系や宇宙全体も構造物である．それらの姿形は様々で，人工的なものもあれば，自然にできたものもある．“自然に” と言っても，地上のものもあれば，天空のものもある．多種多様な構造物に何か共通点はあるのだろうか？

雑多なものを，ただ並べただけでは何も分からない．ある一定の規則にしたがって**分類**（整理）しなければ，おもちゃ箱をひっくり返した状態と同じだろう．では，どんな規則にしたがうべきか？

初めからそれが分かっていれば，何もすることはない．分からないからヤル意味がある．こんなときは，**偏見**[*1]をもつことが重要で，ここでは，“大きさ” にしたがって分類することにしよう．とたんに，「そんな単純なことで . . .」と言われそうだが，所詮偏見なのだから気にすることはない．ダメならダメで，そのときはやり直せば良いだけだ．“大きさ” と言っても，長さ？ 体積？ 重さ？ ，色々ある．ここでは「広がり ～ 長さ」と「密度」を選ぼう．何故かといえば，「所詮偏見だから」．それをグラフにしたのが，下の図だ．[*2] 訳の分からない言葉や記号は無視して，とにかく特徴を探そう．



*1 穏やかに言えば，推測，経験，勘

*2 人によっては，ド・ボークルール／池内ダイアグラムという．ド・ボークルール (Gérard de Vaucouleurs, 1918-1995) はフランスの天文学者．池内さんは姫路出身の宇宙物理学者．

思いの外, 規則正しく, おぼろげなラインが 3 本見えてこないだろうか？ 一つは, ミクロな構造物が並ぶ「ミクロ構造線」, もう一つは, 超マクロな構造が並ぶ「宇宙構造線」である．そして 3 つめが,「物質（物性）・生命構造線」(「水素原子」から「生命」を経由して,「月」や「地球」に至るライン）である．

「広がり」と「密度」という単純な分類だけで, 背後に何かあるように見えてきた．本質を捉えた単純な切口で, 雑多な情報から規則性を見出すことは, 物理学の醍醐味の一つである．それにしても, 広がりにして 61 桁, 質量で 83 桁も異なるあらゆるものを貫く法則など, あるのだろうか？

実はある．これらを貫くのは**物理法則**である.[*3] このノートの目的は, 自然界の構造物に通底する規則性が, 簡単な（かつ, 本質を突いた）物理的な議論で, どのように理解できるかを眺めることにある．

このページの残りでは, 簡単に言葉の説明をしておこう．グラフを見て半数以上の言葉が分かればサッサと次ページへ, 分からなければ以下に目を通し, そんなものかと思って先に進んで欲しい．

全ての構造物は,「素粒子」と呼ばれる, それ以上分解できない “部品” からできている．素粒子にはたくさんの種類があるが, 代表的なものは,「クォーク」と「電子」である．これらの “部品” から, 我々が普段よく目にする構造がどのようにしてできるのだろうか？

まず, クォークの間にはたらく「強い力」(〜「核力」) によってそれらが 3 個集まると,「核子」と総称される「陽子」または「中性子」が 1 個できる．さらに, 陽子や中性子が核力によって複数集まると,「原子核」がつくられる．1 個の原子核が何個の陽子と中性子からできているかによって, 原子核の種類が異なる．

中性子は電気的に中性だが, 陽子はプラスの電気を, 電子はマイナスの電気を帯びているので,「電磁気力」により, 原子核は, 複数の電子を周りに引き付けることができる．そうして出来たのが「原子」である．自然界には約 100 種類の原子が存在するが, その違いは, 原子核が引き付ける電子の数の違いである.[*4] 我々の体を含めた地上の構造物の多様さは, この約 100 種類ある原子の組み合わせ方の豊富さを反映している．

自然界には,「4 つの基本的な力」が存在する．既に述べた強い力と電磁気力の他に,「弱い力」と「重力」を加えた 4 つである．これら以外の力は, 基本的な力からの派生物である．重力は, エネルギーをもつ物同士に必ずはたらく力であり, 弱い力は, 放射性元素が崩壊するときなどに関係する力である．弱い力は構造をつくる上で主役ではないが, 地殻変動のエネルギーの元となる放射性元素のエネルギーを取り出す形で, 間接的に寄与している．

4 つの基本的な力は, 高エネルギー状態になるにつれ統一されていくと考えられている： まず, 電磁気力と弱い力が統一され,「電弱理論」で記述される力になる．さらにエネルギーが高くなると強い力も統一され,「大統一理論」で記述される．そして最後には重力までもが統一され,「超弦理論」によって記述されるだろう, と．

地上の構造物の豊富さは, 原子の種類と組み合わせの豊富さであった．これに対して, 多様に見える宇宙の構造物のほとんどは, 最も軽い原子である水素と, 2 番目に軽いヘリウムから出来ている.[*5] これらが大量に集まって宇宙構造が出来るが, それらが散り散りにならないのは, 重力によって互いに引き付けあっているからである．

簡単な組成で, かつ, 主役の力が基本的に重力だけであるにもかかわらず, 宇宙構造が多様なのは, 規模の違いや, それらが引き起こす**現象**に多様性があるからである．これは何も宇宙構造に限らずありふれたことで, 地球上の例で言えば, 様々な形の雲や, 台風がそうである．どれも主成分は水で, 地球の重力と「慣性力」が主役の力である．

宇宙構造の階層は, 次のようになっている：地球は, 自ら光ることができない「惑星」の一つで, 他の惑星とともに太陽の回りを公転し, 太陽系を形成している．太陽は, 自ら光ることができる「恒星」の一員である．恒星が約 1000 億個程集まると,「銀河」ができる．さらに, 100 個から 1000 個程度の銀河が集まると,「銀河団」と呼ばれる構造になり, 銀河団が寄せ集まると, さらに大きな「超銀河団」となる．

宇宙は, 約 130 億年前に始まって以来膨張し続けている, ということが, 観測によって明らかにされている．宇宙が有限の過去から始まったので, 万物の最高速度（しかし, 有限の速度）をもつ光といえども, 到達出来る距離には限界がある．我々からみたこの限界は「宇宙の地平線」と呼ばれ, その距離が「宇宙の大きさ」と見なされる．

[*3] 特定の現象や**対象にこだわることなく**, それらの背後に控える**普遍的な法則**を見出すことが, **物理学の特質**である．

[*4] 引き付けられる電子の数は原子核の種類でほぼ決まっているので, 原子核の違いと言っても良い．

[*5] 既知の物質の中で最も多いのが水素, 次がヘリウムであることは確かである．しかし, 宇宙を構成するものの中で一番多いものは？ となると, 良く分からない．最近の宇宙観測によると,「ダークマター」や「ダークエネルギー」という（候補物質は挙げられているものの）素性不明のものが宇宙の大半を占めているのではないか？ ということが示唆されており, 真剣に研究されている．

2　物理量, 次元, 単位

科学の（一つの）目標は, 自然現象を 定量的 に検証しながら理解していくことである.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ \text{現象を測定可能な量で表すこと} & \longrightarrow\ \textbf{物理量} \\ \bullet\ \text{物理量の間に成り立つ普遍的な関係を見出すこと} & \longrightarrow\ \textbf{物理法則} \end{cases}$$

2.1　次元：物理量の分類

物理量には様々な種類（長さ, 時間, 重さ, 温度, 電圧, ...）が存在するので, まず分類しよう.

次元　比較できる物理量同士は皆同じ仲間（次元）

単位　同じ次元をもつ量を比較するための基準

$$\text{つまり, 比較}\left\{\begin{array}{l}\text{可能な}\\ \text{不可能な}\end{array}\right\}\text{物理量同士は, 互いに}\left\{\begin{array}{l}\text{同じ}\\ \text{異なる}\end{array}\right\}\text{次元をもつ.}$$

物理量 Q の次元を, しばしば $[Q]$ と書く

例えば,

$$[\,\text{速さ}\,] = \left[\frac{\text{長さ}}{\text{時間}}\right] = \frac{[\text{長さ}]}{[\text{時間}]} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT}^{-1}$$

や

$$[\,\text{（三角形の）面積}\,] = \left[\frac{\text{底辺}\times\text{高さ}}{2}\right] = \left[\frac{(\text{長さ})^2}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right]\,[\text{長さ}]^2 = \mathrm{L}^2$$

注)　次元をもたない量のことを**無次元量**と言う. 代表例は, 円周率 π である. 無次元量の次元は, [無次元量] $= 1$ とすべき. なぜなら, $\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{[\,\text{三角形の面積}\,]}{[\,\text{底辺}\times\text{高さ}\,]} = \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{L}^2} = 1$ だからである.

次元	表記法	代表的な単位		
		日常	宇宙	原子
長さ	Length	尺, cm	pc（パーセク）	r_{Bohr}（ボーア半径）
質量	Mass	貫, g	$M_{\odot}$（太陽質量）	m_{p}（陽子質量）
時間	Time	刻, sec	sec (or year)	sec

重要事項

- 年齢 y（才）の人物 の身長が ℓ（cm）で, 体重は m（kg）とすると, $[y] = \mathrm{T}$, $[\ell] = \mathrm{L}$ そして $[m] = \mathrm{M}$ となる. これを, 「y は時間次元, ℓ は長さ次元, そして m は質量次元をもつ」などと言う.
- 異なる次元をもつ物理量同士は比較できないので, それらの間に等号・不等号は成立しない, つまり, **次元の異なる量の大小関係は意味がない**.
  異なる次元をもつ物理量同士の足し引きも**無意味**（$1\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{kg}$ や $1\ \mathrm{m} + 1\ \mathrm{kg}$ は無意味）であるが,
  掛け算・割り算は（単位も一緒に計算すれば）OK.
- 次元（or 単位）が異なる量が結び付いている時は, 必ず次元（or 単位）を補う量 — 換算係数 — が存在する. 例えば, 2 ドル = 200 円 という関係式は, 正確には 2 ドル $= \alpha \times 200$ 円 を表し, 必ず為替レート α が間を仲介している $\big(\alpha = 1$ ドル/100 円 ； $[\alpha] =$ ドル/円$\big)$.

2.2 基本次元と組立次元

次元も多種多様で無数にあるが, 例えば [面積] = [長さ]^2, [体積] = [長さ]^3 や [速さ] = $\dfrac{[\text{長さ}]}{[\text{時間}]}$ などのようにお互いに結び付き, 実質的なバリエーションの豊富さに寄与しないものがある.

そういったものを除いていくと, 基本的な次元の種類は見掛けより少ないのではないだろうか？

基本次元	お互いに関係付けることができない, という意味で基本的な次元.
組立次元	基本次元を適当に組み合わせることで得られる次元.

先の例で言うと, [長さ], [面積] そして [体積] はお互いに関係付くので, どれか一つを基本次元（どれでも良い）とすれば, 残りは組立次元となる. また, [長さ] と [時間] を基本次元とすれば [速さ] は組立次元である.

2.3 基本次元と物理法則

物理法則の役割

一見異なる次元をもつ物理量同士を関係付けるのが, **物理法則**である. つまり, 異なる次元と思われていた物理量を結び付け, 基本次元の数を減らす（次元を 統一する！）ことが, 物理法則の果たす重要な役割.

● **フック（ばね）の法則：** 釣り合いの長さからのずれ（つまりは "延び"）に比例して力がはたらく.
　$\longrightarrow$ [長さ] と [力] の次元が統一されたといっても, それらの "為替レート" であるばね係数は材質に依存してしまい, 多様性はほとんど減らないので "低級" な法則である.（しかし, 力が伸びに**比例する**という点では統一されているので, この点には法則たる資格がある.）

● **落下の法則：** 地表上の適当な高さで物体を静かに手放すと, 経過時間に比例して落下速度が増す.
　$\longrightarrow$「フックの法則」とは違い, [速さ] と [時間] を結び付ける係数が, 手放す物体の材質や, 手放すときの高さに依らない定数（重力加速度）なので, より "高級" な法則となっている.

※ 実は, 基本次元には [長さ], [時間], [質量] の 3 つがあり, その他の次元はこれらの組立次元となる.

そして,（特殊）**相対性理論**と**量子力学**は, この 3 つの基本次元をさらに関係付ける, より強力な法則である.
次元変換の役を担う "換算係数" は, それぞれ, **プランク定数** $\hbar$ と**光速度** c で, 次元は $[\hbar] = \mathrm{ML^2T^{-1}}$ と $[c] = \mathrm{LT^{-1}}$ である. それぞれの理論が中心的役割を果たす世界では, c や $\hbar$ が使えるので, それぞれの世界では, 実質的な基本次元の数は 2 つに減ってしまっている. その分, 次元が統一された, と言える.

（特殊）相対性理論は, 物体の速度が光速度 $c = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ に近い現象に対して適用しなければならない理論である.*6

一方, 量子力学は, ミクロな現象に対して必ず適用される理論で,*7 それを特徴付けるプランク定数は $\hbar = 1.054571596 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ という非常に小さい値である. 量子力学が適用される目安は, 大体, 質量 m の粒子が速度 v の運動をしているとき, その運動領域の大きさ L が, $L \lesssim \dfrac{\hbar}{m\,v}$ となる位小さい場合である. 電子の場合だと, $L \lesssim \dfrac{\hbar}{m\,v} \sim 5 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \times \left(\dfrac{v}{2 \times 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}\right)^{-1}$ 位になる. 原子内電子の速度は, 大体 $2 \times 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 程度で, 水素原子の半径が 5.3×10^{-11} m ほどなので, 原子内の電子は量子力学に支配されていることが分かる.

*6 本来は, いかなる速度でも（特殊）相対性理論を適用すべきだが, 物体の速度が光速度よりも十分遅い場合は, ニュートン力学で十分扱える, というのが本当の意味である.

*7 これも（特殊）相対性理論の場合と同様, いつでも量子力学を適用すべきだが, 下の状況が満たされないようなマクロな世界では, ニュートン力学で十分扱える, という意味である.

なぜ「強力」か？

それは, 次元を調べること（次節で解説する次元解析）からすぐに次のことが示唆されるからである：
物理学において, 状態を表すために基本的な量は **運動量** p と**エネルギー** E の 2 である.
運動量 p は, おおざっぱに言うと「運動の勢い」そのものを表す量で, （質量）×（速度）で与えられる.
よって, $[p] = \mathrm{M} \times \mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{M}\,\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1}$ である.

一方, エネルギー E は「運動の勢い」とも関係する ($E = mv^2/2 + \cdots = p^2/2m + \cdots$) が, それだけでは表しきれない「秘められた勢い（ポテンシャル）」も取り込んだ量で, 仕事量と関係する. 仕事量は （力）×（移動距離）で与えられるので, エネルギーの次元は $[E] = \mathrm{M}\,\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-2} \times \mathrm{L} = \mathrm{M}\,\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-2}$ と分かる.
この 2 つの量が, 相対論と量子力学, それぞれが支配する世界で何と結び付くだろうか？　次元を調べると

	相対論	量子力学
p	$\mathrm{M} \times \mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{M}\,[c]$	$\mathrm{M}\,\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1} \times \mathrm{L}^{-1} = [\hbar]\,\mathrm{L}^{-1}$
E	$\mathrm{M} \times (\mathrm{L}\,\mathrm{T})^{-2} = \mathrm{M}\,[c^2]$	$\mathrm{M}\,\mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1} \times \mathrm{T}^{-1} = [\hbar]\,\mathrm{T}^{-1}$

と表せることが分かるが, これらは何を意味しているのだろうか？
相対論では運動量とエネルギーが共に質量と結び付いている. 運動量はもちろん質量に依存するが, 速度にも関係している. $[p] = \mathrm{M}\,[c]$ は, 物体の質量がその速度とも関係することを示唆しているように見える. また, $[E] = \mathrm{M}\,[c^2]$ は, 物体のエネルギーに質量が直接結び付き, 静止していてもエネルギーをもつ可能性を示唆するかのようだ.

量子力学では, もっと謎めいている. 運動量が「長さ」に, エネルギーが「時間」の逆数に結び付くことが示唆されているが, この場合の「長さ」, 「時間」とは一体何だろうか？　例えば, 「長さ」として, 粒子を閉じ込める箱のサイズをもちいると, $[p] = [\hbar]\,\mathrm{L}^{-1}$ という式は, 小さいサイズの箱に閉じ込められた粒子は大きな運動量をもつことを示唆し, そのため, 箱の壁には強い圧力がはたらいていることを示唆する. 量子力学的世界では, 粒子を閉じ込めることができる最小のサイズでもあるのだろうか？

さらに相対論と量子力学が共に重要になる「相対論的量子力学」の世界では, c と $\hbar$ を使って基本次元が 1 つで十分と分かる（例えば「質量」）:

$$\mathrm{L} = [c]\,\mathrm{T} = \left[\frac{\hbar}{c}\right]\frac{1}{\mathrm{M}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathrm{L} = \left[\frac{\hbar}{c}\right]\frac{1}{\mathrm{M}}\,, \quad \mathrm{T} = \left[\frac{\hbar}{c^2}\right]\frac{1}{\mathrm{M}}\,.$$

「質量」に結び付く「長さ」や「時間」とは何だろうか？

量子力学はミクロな世界を記述する理論である. 質量をもてば重力が働くが, 現在知られている素粒子（電子や, 陽子/中性子などを構成するクォークなど）の質量は軽すぎて, それら個々の粒子がおよぼす重力は無視できる位に小さい. しかし想像を逞しくして「相対論」, 「量子力学」, そして「重力」がすべて重要になる現象があったらどうなるであろうか？ 重力を支配するのは, **重力定数** G であり, その次元は $[G] = \mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{L}^3\,\mathrm{T}^{-2}$ である. この世界では, 3 つの基本次元がお互いに結び付き, 実質的な基本次元の数は 1 つになっている. また, それぞれの基本次元には "基本的な単位" が存在し, 人為的に単位を導入する必要がない世界になっている. なぜなら, 3 つの基本定数 $c, \hbar, G$ から, 「長さ」, 「時間」, 「質量」の次元をもつ基本単位が

$$l_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{G\,\hbar}{c^3}} \sim 1.6 \times 10^{-33}\ \mathrm{cm}\,, \quad t_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{G\,\hbar}{c^5}} \sim 5.4 \times 10^{-44}\ \mathrm{sec}\,, \quad m_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar\,c}{G}} \sim 2.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{g}\,,$$

のように作れてしまうからである. これらはそれぞれ, **「プランク長」**, **「プランク時間」**, **「プランク質量」**と呼ばれている. m_{Pl} はバクテリア程度の質量で小さいと思うかも知れないが, 素粒子単位の世界から見ると非常に大きな値である. 例えば陽子の質量 $m_{\mathrm{p}} \sim 1.7 \times 10^{-24}$ g からすると, 実に $m_{\mathrm{Pl}}/m_{\mathrm{p}} \sim 10^{19}$ 倍もの大きさである.

これらの数値は, 日常感覚と非常に掛け離れた値だが, それらが自然な値となる世界がある. それが

「宇宙（∼ 時空）が誕生する世界」

である.

3　次元解析

次元概念だけを頼りに性質を調べていく手法を, **次元解析** という. この “当たり前” の議論から, 実に多くのことが読み取れることは, 先に見た通りである. ここでは, もっと身近な例でその威力を感じてみよう.

例えば, 先の「落下の法則」を考える:「ある高さから, 静かに物体を落とす. このとき, 経過時間 t と共に物体の落下速度 v と落下距離 ℓ はどのように変化するか？」

高校で習った（これから習う）はずで, 恐らく, （横軸）時間と（縦軸）速度のグラフ（原点を通る傾き g の直線）を書いて, 直線と時間軸がつくる三角形の面積から落下距離を求めたのではないだろうか？ ともかく答えは,

> 重力加速度を g （$g = 980\ \mathrm{cm/sec^2}$）として,
> $$v = g\,t\ , \qquad\qquad \ell = \frac{1}{2}\,g\,t^2\ ,$$

となるが, これを次元解析でもう一度見直してみる.

まず, 求めたい落下速度と落下距離の次元は, それぞれ $[\,v\,] = \mathrm{L\,T^{-1}}$, $[\,\ell\,] = \mathrm{L}$ である.

これらが, 一体何によって決まるか考えてみると, 候補として

$$\text{重力加速度：}\ g\ \left(\,[\,g\,] = \mathrm{L\,T^{-2}}\,\right), \qquad\qquad \text{経過時間：}\ t\ \left(\,[\,t\,] = \mathrm{T}\,\right),$$

が挙げられる. そこで, 「v や ℓ は, 重力加速度 g と経過時間 t で表せる（v や ℓ は, g と t の関数である)」と予想して, その組み合わせ（関数形）を考えてみる.

さて, g と t から, 「速さ」や「長さ」と同じ次元をもつ量を作ろうとすると, $[\,gt\,] = \mathrm{L\,T^{-1}}$ と $[\,gt^2\,] = \mathrm{L}$ が作れる. また, もう少し考えると, それら以外には無いことが分かる.

ここで, 同じ次元をもつ物理量のみが等号で関係付けられる ことを思い出せば, まだ決まらない **無次元量** の定数 C_v と C_ℓ を使って,

$$v = C_v\,g\,t\ , \qquad\qquad \ell = C_\ell\ g\,t^2\ ,$$

と書けてしまうと分かる. つまり, 次元だけを頼りにして, v と ℓ が 時間 t と共にどう変化するか, が決まってしまった. これが次元解析の威力である.

もう少し一般的に, 初速度 V があったらどうなるだろうか？ このときも同様に, 「v や ℓ は, 重力加速度 g と経過時間 t および初速度 V で表せる」と予想できるので, 先と同じ考察に従って考えてみよう. 以下では ℓ に注目するが, v も同様にしてできる.

> ℓ を与える量は, 当然「長さ」の次元をもつので, g, t, および V から「長さ」の次元をもつ量を作ってみる. そこで, $g^a\,t^b\,V^c$ が「長さ」の次元をもつときの a, b, c を求めてみよう.
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{L} &= [\,g^a\,t^b\,V^c\,] = [\,g^a\,] \times [\,t^b\,] \times [\,V^c\,] = [\,g\,]^a \times [\,t\,]^b \times [\,V\,]^c \\ &= (\mathrm{L\,T^{-2}})^a \times \mathrm{T}^b \times (\mathrm{L\,T^{-1}})^c = \mathrm{L}^{a+c} \times \mathrm{T}^{-2a+b-c} \end{aligned}$$
>
> $$\longrightarrow \quad \begin{cases} 1 = a + c & (\mathrm{L}\ \text{のベキから}) \\ 0 = -2a + b - c & (\mathrm{T}\ \text{のベキから}) \end{cases}, \quad \text{これを解いて} \quad \begin{cases} a = b - 1 \\ c = 2 - b \end{cases}$$
>
> $$\Longrightarrow \quad g^{b-1} \times V^{2-b} \times t^b = \left(\frac{V^2}{g}\right) \times \left(\frac{g\,t}{V}\right)^b\ .$$
>
> このように, 先程とは異なり, 決まらない数 b が現れた. どうしよう. もう少しがんばると, 初期時刻 $t = 0$ での落下距離は 0 なので, t のベキは正でなければならないことに気付く. つまり, $b > 0$ の制限が付くが, それでもまだ無数の候補が存在する. 代表的なものだけでも, $b = 1$ の $V\,t$, $b = 2$ の $g\,t^2$, $b = 3$ の $g^2\,t^3/V$ などがあり, それらすべてが皆「長さ」の次元をもち, 落下距離を定めるに相応しい候補となる. （もちろん, $b = 1/2$ などの

分数や $b=\sqrt{2}$ などの無理数も OK.)

つまり, 次元のみに基づいた, これまでの議論だけでは, 「落下距離は, 無数の無次元定数 C_b を使って

$$\ell = \sum_{b>0} C_b\, g^{b-1} V^{2-b} \times t^b = \cdots + C_1\, V\, t + C_2\, g\, t^2 + C_3\, \frac{g^2\, t^3}{V} + \cdots$$

と書ける」ことしか言えない. しかし, 初速度 V がゼロとそうでない場合とがスムーズにつながっているはず, という点に気付くと, 分母に V が現れると都合が悪いので（分母が 0 の割り算は意味がない）, 結局, 見慣れた次式のみが許されると分かる：

$$\ell = C_1\, V\, t + C_2\, g\, t^2\ .$$

多くの場合, 上記の例のように, 単純な次元解析一本槍だけで重要な手掛かりを得ることは期待できないが, プラス α の物理を上手に加味することで, 有用な情報を得ることができる.

弦理論のプロトタイプ

電磁気力や重力など, 自然界に存在する 4 つの基本的な力を統一的に記述できる「究極の統一理論」の（現段階の）唯一の候補として, 超弦理論がある. 「万物は紐状のものからできていて, 多種多様な粒子の個性は "紐" の振動の仕方の違いである」と考えるこの理論, にわかには信じ難い. 風変わりなこの理論を物理学者達が真面目に取り扱う気になった契機は何であろうか？ 次元解析でも理解できるところを眺めてみよう.

粒子の運動は, プランク定数と同じ次元をもつ**作用積分** S によって定められることが知られている. この S は, 非常に大雑把に言うと 粒子の移動時間で特徴付けられている. つまり, $S \sim t$ であるが, 両辺の次元を合わせるためには $\mathrm{ML^2T^{-2}}$ の次元をもち, かつ, 粒子を特徴付ける係数が必要である. 自然定数である光速度と粒子の質量を利用すれば, 欲しい次元をもつ量 $m\,c^2$ が作れる. そこで, 次元を正しく反映させた粒子の作用積分を書くと, $S \sim m\,c(ct)$ となる.

では, 空間的な拡がり（D 次元とする）をもった物体 の運動はどうか？ この物体の運動も, プランク定数と同じ次元をもつ作用積分で定まると仮定する. ただ, その 作用積分は 粒子の場合と少し異なり, 移動時間だけでなく 空間的なサイズにも依存する, と考えるのは自然だ. そう仮定すると, 物体のサイズを表す V_D と, 粒子の場合でも必要だった, 物体を特徴付ける次元合わせの係数 k を導入すると, その作用積分は $S \sim k\,(ct)\,V_D$ と書けるだろう. さて, 「物体のサイズ」は, 線状物体（$D=1$) の場合は「長さ」で, 面状物体（$D=2$) の場合は「面積」で, ... というように特徴付けるのが自然なので, $[V_D] = \mathrm{L}^D$ とするのが良いだろう. すると, 物体を特徴付ける係数 k の次元は, $[S] = [k][c]\mathrm{T\,L}^D = [k]\,\mathrm{L}^{D+1}$ が $\hbar$ の次元 $[\hbar] = \mathrm{ML^2T^{-1}} = \mathrm{M\,L}[c]$ に等しいことから, $[k] = \mathrm{ML}^{-D}[c]$ と分かる.

たったこれだけのことと, 次元解析とにより, 物体の「回転の勢い」を表す**スピン** J ($[J] = \mathrm{M\,(LT^{-1})\,L}$) と物体の質量 m との間に, 次の関係が存在することが容易に言えてしまう：

$$\begin{cases} [J] = \mathrm{M\,L}\,[c]\ (=[\hbar]) \\ [k] = \mathrm{ML}^{-D}[c] \end{cases} \quad \to \quad [J^D] = \mathrm{M}^{D+1}[\,\frac{c^{D+1}}{k}\,]$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\boxed{J \propto m^{(D+1)/D}}}\ .$$

一方, 素粒子実験から, （核子などの）素粒子の質量 m とそのスピン J との間には, $J \propto m^2$ の関係があることが早くから知られていた. これを再現するには, 先の関係式で $D=1$ に選べば良い. つまり, 紐状物体 ($D=1$) を考えると, $J \propto m^2$ の実験事実が自然に導かれるのである. もしかすると, 核子は点粒子でなくて弦（紐）ではないのだろうか？ これが, 超弦理論の出発点となった「**核子の弦模型**」である.
このモデルは, 1970 年頃に南部陽一郎博士や後藤鉄男博士らによって提唱された.

4　自然界の構造, 再考

冒頭のグラフが示すように, 自然界の構造には 3 つの系列 — 「ミクロ構造線」「宇宙構造線」, そして「物質(物性)・生命構造線」— があった. これらの系列の起源を考えてみよう.

原子は化学反応によって変化するものの, 比較的安定な構造である. 原子は, プラスの電気を帯びた原子核とマイナスの電気をもつ電子とから構成されているので, 電気力によって引き合っている. これだけだと, 引力によって潰れてしまうが, 量子力学が支配するミクロな世界では, 2.3 節でみたように, 量子力学固有の一種の "反発力" がある. 原子は, 電気的引力と量子力学固有の斥力とがつり合って形成される構造である. このように, 安定した構造は, 引力と斥力とがつり合いの状態にある.

また, 冒頭でも述べたように, 原子核を構成する陽子と中性子は, クォークと呼ばれるよりミクロな基本粒子から構成されている. ここまで極微の世界になると, 量子力学だけでなく特殊相対性理論の効果も無視できず, 「相対論的量子力学」が支配する世界になっている. この世界では, 2.3 節でみたように, 質量と長さとが, 自然に結び付いていた. 超ミクロな構造物の大きさを ℓ, その質量を m, 密度を ρ とすると,

$$\mathrm{L} = \left[\frac{\hbar}{c}\right]\frac{1}{\mathrm{M}} \qquad \longleftrightarrow \qquad [\,\ell\,] = \left[\frac{\hbar}{m\,c}\right] \qquad \longleftrightarrow \qquad [\,\rho\,] = \left[\frac{m}{\ell^3}\right] = \left[\frac{\hbar}{c}\right]\times\left[\frac{1}{\ell^4}\right],$$

から分かるように, $\rho \propto \dfrac{1}{\ell^4}$ の関係が示唆される.

今度は, 銀河や銀河団といった超マクロな宇宙の構造物に目を転じよう. この世界では重力が支配的である. 大きな質量をもつものを徐々に狭い領域に押し込めていくと, やがてそれは, 光さえも脱出できない "暗黒星", ブラックホールになる. これは単に, 光さえも脱出できない, という意味だけでなく, 強力な重力によってどんなものも潰れてしまう, ということも意味する. 質量 M の物体がブラックホールになってしまう限界の大きさは重力半径とよばれ, ブラックホールの "半径" の役割を果たすものである.

質量 M の宇宙構造物が安定に存在するには, 当然, その大きさ R は重力半径 r_{BH} より 大きくなければならない. 是非, 付録の問題を解いて, 重力半径と質量との関係を見出して欲しい. その答えは, $[\,r_{\mathrm{BH}}\,] = \left[\dfrac{G\,M}{c^2}\right]$ である. この結果から, 宇宙の構造物の大まかな目安として,

$$R > r_{\mathrm{BH}} \sim \frac{G\,M}{c^2} \qquad \longrightarrow \qquad M \lesssim \frac{c^2\,R}{G} \qquad \longrightarrow \qquad \rho \sim \frac{M}{R^3} \lesssim \frac{c^2}{G}\times\frac{1}{R^2},$$

の関係が得られ, $\rho \propto \dfrac{1}{R^2}$ が示唆される.

冒頭の図をもう一度見直すと, 確かに, 「ミクロ構造線」と「宇宙構造線」とが, それぞれ $\rho \propto \dfrac{1}{\ell^4}$ と $\rho \propto \dfrac{1}{R^2}$ のグラフによく合うことが分かる. いい加減な議論に見える次元解析であるが, このように, その推論はミクロとマクロ, それぞれの構造の特徴をうまく説明している.

ところで, 「ミクロ構造線」と「宇宙構造線」は, 左上の方, つまり, 高密度, かつ非常に小さな広がりのところで交差している. そこはまさに 3 つの自然定数 $G, c, \hbar$ がすべて関与するところで, 「宇宙（時空）誕生」のときの物理状況である. このように, 超ミクロな領域の物理の最前線（素粒子物理学）と超マクロな領域のそれ（宇宙物理学）とは, 実は繋がっている. 今では, 素粒子の研究をするために初期宇宙を利用したり, 初期宇宙の研究のために近年の素粒子物理学の知見を利用したりする, といったことが良く行われており, 2 つの分野間の研究交流はとても盛んである.

こう述べてくると, もう一つの物理の最前線「物質（物性）・生命構造線」が切り離されているように見えるが, そうではない. 次の章の最後にほんの少しだけ出てくるが, 素粒子物理学になくてはならない「変換対称性とその破れ」という概念は, まさに「物質（物性）・生命構造線」の最前線で産み出されたものだ. また, 球状星団など多数の星の集団の性質を探る「自己重力多体系」の研究は, 核融合研究に欠かせないプラズマ（あまりにも高温なため原子がバラバラに壊れ, その構成要素である原子核と電子とが飛び交っている状態）の研究と密接な関係がある.

このように, 物理学の 3 つの最前線はお互いにリンクしている. 前線はそれぞれにあるが, 物理学は一つである.

5 次元再考, そして相対性原理へ

- 物理量は次元（単位）をもつ
- 次元（単位）も計算でき, 同じ次元（単位）をもつ量同士でないと等号は成立しない
- 次元概念だけを手掛かりにして（次元解析）, 有用な情報が得られる

を, ここまでに見てきた. 以上のことをもう少し詰めて考える.

次元をもつ量を表現するには, ある基準となる量（つまり**単位**）を決めてその何倍であるか, という形で表現する. 基準となる量をどのように選ぶかは人間の勝手であるが, 自然法則は人間の思惑に左右されないはずである. そこで,（単位についての）**相対性原理** —「自然法則は, 単位系によらない形で表現される」— に導かれる.*8 この「自然法則は人間の思惑, 状態に左右されないはず」という当たり前の感覚をさらに展開してみよう.

例えば, 静止している人 (S) がもつ「S-法則」と, S に対して一定速度で運動している人 (R) の「R-法則」は本質的に異なるのだろうか？ そんなことはないはずである. なぜなら, R の立場では「静止しているのは自分 (R) であって, S が運動している」となるからである. これから,

（等速直線運動に対する）相対性原理

自然法則は, 等速直線運動する観測者にとって本質的に同一である.
= 等速直線運動する状態は基本法則について対等である.

に導かれる. これにさらに**光速度一定の原理** — 等速度直線運動しているどの観測者にとっても, 光は同一速度で観測される— という物理的に重要な仮定をしてできたのが,（特殊）相対性理論である. 一方,「光速度は, 観測者の速度の分だけ遅くなったり速くなったりして観測される」とした**速度の加法性**を要求するのが, ニュートン力学である. 自然が前者を採用していることは, 20 世紀初め頃に**実験・観測**によって確認された.

さらに考えを進めよう. 等速直線運動している状態は皆対等になったが, このままでは等速直線運動する状態だけが特別扱いで, その他の, 加速度運動する状態は別扱いになっている.

しかし, 加速度運動していることをどうやって知るのだろうか？ 駅のベンチに座っている人と, 動き始めた列車の乗客を想定しよう. どちらが加速度運動しているのだろうか？「後者である」が普通の答えだが, 果たしてそうか？ 列車の乗客からすれば, 駅のベンチに座っている人の方こそ, 加速度運動しているのだから ... そこで今度は,

（一般的な運動に対する）相対性原理

自然法則は, どのような運動をする観測者にとっても本質的に同一である.
= どのような運動状態も基本法則について対等である.

という考えに至るが, しかしちょっと待て.「列車が加速すると後ろに引っ張るような力が, 減速すると前に引き寄せるような力 — **慣性力** — が働く感覚を我々は経験している. これによって加速しているかどうかを判定できるはずだ」という意見がある. つまり「加速しているかどうかは明らかに区別でき, 決して対等ではない」という日常経験に根差した意見である. 日常の事実は動かし難いが,「相対性原理」も捨て難い. 両立できないものだろうか？ ここに,「等価原理」という妙案がある.「見掛けの力である**慣性力こそが重力である**」と再解釈するのだ.

「駅と列車」の状況を "縦" にして考えてみる. つまり, 駅舎を地表に, 列車をエレベーターにするのである. そして大胆にもエレベーターの綱を切ってしまおう ...

地表の人に言わせると,「我々には "重力" なる力がはたらいている. この力は万物にはたらき, エレベーターはそれに引かれて落下している.」となる. しかし, 自由落下中のエレベーター内の人に言わせれば,「私には何も力がはたらいていない. また, 私に言わせれば, 加速度運動しているのは地表の人の方だ. だから, 地表の人が力を感じるのは当然だが, 普通はそれを慣性力と言うのだ.」となる.

*8 実は, これではトートロジーなのだが ....

地表の人にはたらく同じ力を, 地表の人は重力と言い, エレベーター内の人は慣性力と言う. 丁度エレベーター内の人が力を感じないのと同じように, 見掛けの力である慣性力は, 適当な運動状態の観測者を用意することで, いつでも消すことができる. 重力は慣性力なのだろうか？

「局所的には, 慣性力と重力は区別できない = 局所的には, 重力を消し去ることができる」という考えが, 等価原理である.

この**等価原理**と（一般的運動についての）**相対性原理**とを組み合わせてできたのが, アインシュタインの重力理論（一般相対性理論）である.

さらに抽象化しよう. 運動する物体が静止して見える座標系は, 当然, 運動状態によって異なる. だから, 運動状態が異なるということは, その（静止）座標系の違いとして表現することができる. よって, 異なる運動状態の観測者の視点を渡り歩くことは, （静止）座標系を "渡り歩く" こと — 座標変換 — になる. そこで, 相対性原理は「基本法則は採用する座標系に本質的に依存しない」つまり, 「**基本法則は座標変換で不変である（形を変えない）**」と表現できる. 「基本法則は, （$\cdots$）変換で形を変えない」の（$\cdots$）を, なぜ「座標」に限るのだろうか？ もちろん, 「座標変換」は観測者の運動状態に結び付いているので特別な意味があるように思える.

しかし, もっと抽象的な「〜変換」を考えてはいけない理由はない. 重要なのは, それを自然が採用しているか否かであって, 考えること自体に何ら問題はない. さらに,

ネーターの定理

（連続）変換で不変な（= "対称性をもつ" という）理論には必ず保存量が付随する[a]

[a] 女性数学者, エミー・ネーターが発見した. 大学の「解析力学」を学ぶと理解できる.

という強力な定理がある. これから「保存量の背後には何か対称性が潜んでいるのでは？」という誘惑にかられる. 例えば, 経験的に**電気量は保存する** — 「ここ」から消えることはあっても, それは移動しただけでどこかには存在しており, 総量として保存している — ことを知っている. そこで, この「電気量保存則」の背後には, それを保証する**対称性**が潜んでいるのでは？ と考えたくなる.

実際に, 自然はこの予想を採用していて, 電気・磁気を支配する電磁気学の基本法則（マックスウェルの方程式）には「$U(1)$ 対称性[*9]」が存在している. また, この対称性は, 時空のあちこちで好き勝手に $U(1)$ 変換 (局所的な $U(1)$ 変換）を行っても成立する. このような, 局所的な変換に対しても理論が不変となる対称性のことを, 特に「**ゲージ変換対称性**」と呼ぶ. この対称性をもつ粒子の質量は, 必ず零となることが分かっているので, 電磁気学の基本方程式がゲージ対称性をもつことは, 光の質量が零であることの, 深い理解をもたらしている.

この「$U(1)$ 対称性」を「$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 対称性」というものにまで "大きく" すると, 「弱い力」[*10]と「電磁気力」を統一した「**電弱力**」, および「**強い力**」をあわせて記述する「**標準理論**」が得られる.

「電弱力」と「強い力」を統一して記述するには, もっと "大きな"「$SO(10)$ 対称性」を考えたり, 新たな変換対称性である**超対称性**を要求した「超対称 $SU(5)$ 対称性」を用いたりするのが良い, と言われている.

さらに**重力**をも含めすべての力を統一し, 「宇宙が誕生する世界」を記述できる理論としては,
「基本物質は点粒子でなく弦であり, 我々の観測する多種多様な粒子は弦の多種多様な振動状態の表れである」と考え, その弦が「超対称性」と「**等長変換対称性**」をもつとした**超弦理論**が現段階で唯一の候補である.

さらに, 物質の「**質量の起源**」や, そもそもの「**物質の起源**」を考える上で, 変換対称性とその**破れ**が重要な役割を果たしていることが理解されつつある.

このように, 「**変換対称性を通して自然を捉える**」という考え方は, 今や現代物理学の根幹を成している.

[*9] "円周上の各点は対等である" ことを意味する対称性で, この変換 — $U(1)$ 変換 — は, 「円周上の各点を周上に沿って一様に移動させる変換」である.
[*10] ニュートリノが唯一感じることができる力

付録 A　記法の約束

乗算

$$\boxed{x \times y = x\,y}$$

A.1　ベキ

$$x^a \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{「}x \text{ の } a \text{ 乗」}$$

(正の) 整数ベキ

$$\boxed{x^a = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{a\ 個}}$$

$$10^1 = 10\,, \quad 10^2 = 10 \times 10 = 100\,, \quad 10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{4\ 個} = 1\,\underbrace{0000}_{4\ 個}\,,$$

$$10^a = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{a\ 個} = 1\,\underbrace{00 \cdots 0}_{a\ 個}\,,$$

$$2^1 = 2\,, \quad 2^2 = 2 \times 2\,, \quad 2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4\ 個}\,, \quad 2^a = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{a\ 個}\,,$$

(負の) 整数ベキ

$$\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{a\ 個} = \underbrace{x^{-1} \times x^{-1} \times \cdots \times x^{-1}}_{a\ 個}}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10}\,, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \times 10} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 10^{-1} \times 10^{-1}\,,$$

$$10^{-a} = \frac{1}{10^a} = \frac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{a\ 個}} = \underbrace{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \cdots \times \frac{1}{10}}_{a\ 個} = \underbrace{10^{-1} \times 10^{-1} \times \cdots \times 10^{-1}}_{a\ 個}\,,$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2}\,, \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2^{-1} \times 2^{-1}\,,$$

$$2^{-a} = \frac{1}{2^a} = \frac{1}{\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{a\ 個}} = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{a\ 個} = \underbrace{2^{-1} \times 2^{-1} \times \cdots \times 2^{-1}}_{a\ 個}\,,$$

0 乗

$$\boxed{x^0 = 1}$$

A.2　ベキの計算：指数の計算

$$x^a \times x^b = \underbrace{x\times x\times\cdots\times x}_{a\ 個} \times \underbrace{x\times x\times\cdots\times x}_{b\ 個} = \underbrace{x\times x\times\cdots\times x}_{(a+b)\ 個} = x^{a+b}$$

$$x^a \times x^{-b} = \frac{x^a}{x^b} = \frac{\overbrace{x\times x\times\cdots\times x}^{a\ 個}}{\underbrace{x\times x\times\cdots\times x}_{b\ 個}} = \underbrace{x\times x\times\cdots\times x}_{(a-b)\ 個} = x^{a-b}$$

例

$$100\times 1000 = 100000 \quad\Longleftrightarrow\quad 10^2\times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$$

$$\frac{100}{1000} = \frac{1}{10} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{10^2}{10^3} = 10^2\times 10^{-3} = 10^{2-3} = 10^{-1}$$

$$\frac{1000}{1000} = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{10^3}{10^3} = 10^3\times 10^{-3} = 10^{3-3} = 10^0$$

付録 B　物理学の基本法則（方程式） ～ 目の楽しみのために ～

相対論：アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = \frac{8\,\pi\, G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \qquad \longleftarrow \qquad S = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R + S_{\rm matter}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

量子力学：シュレーディンガー方程式

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\Psi_t\,\rangle = \hat{H}(t)\,|\,\Psi_t\,\rangle \qquad \longleftarrow \qquad S = \langle\,\Psi_t\,|\left(i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(t)\right)|\,\Psi_t\,\rangle$$

$$P\big(\,\vec{x}\in\Omega\,;\ |\,\Psi_t\,\rangle\,\big) = \int_\Omega d^3x\,\left|\langle\,\vec{x}\,|\,\Psi_t\,\rangle\right|^2$$

電磁気学：マクスウェルの方程式

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\,\rho_e\ , \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\ ,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial(c\,t)} = 0\ , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial(c\,t)} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}_e\ ,$$

$$\Leftrightarrow \qquad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi\, j^\mu \qquad \longleftarrow \qquad S = -\frac{1}{4\pi}\int d^4x\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + S_{\rm matter}$$

熱力学：熱力学第 0, 1, 2 法則

熱平衡系に対し　$T = 一定$,　　$dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN$,　　孤立系に対して　$dS \geq 0$

統計力学：ボルツマンの公式

$$S = k_{\rm B}\,\log_e\,W(E,V,N)\ , \qquad W(E,V,N) = \frac{1}{h^{3N}}\int_V d^{3N}x\int d^{3N}p\ \ \delta\big[\,E - H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\big]$$